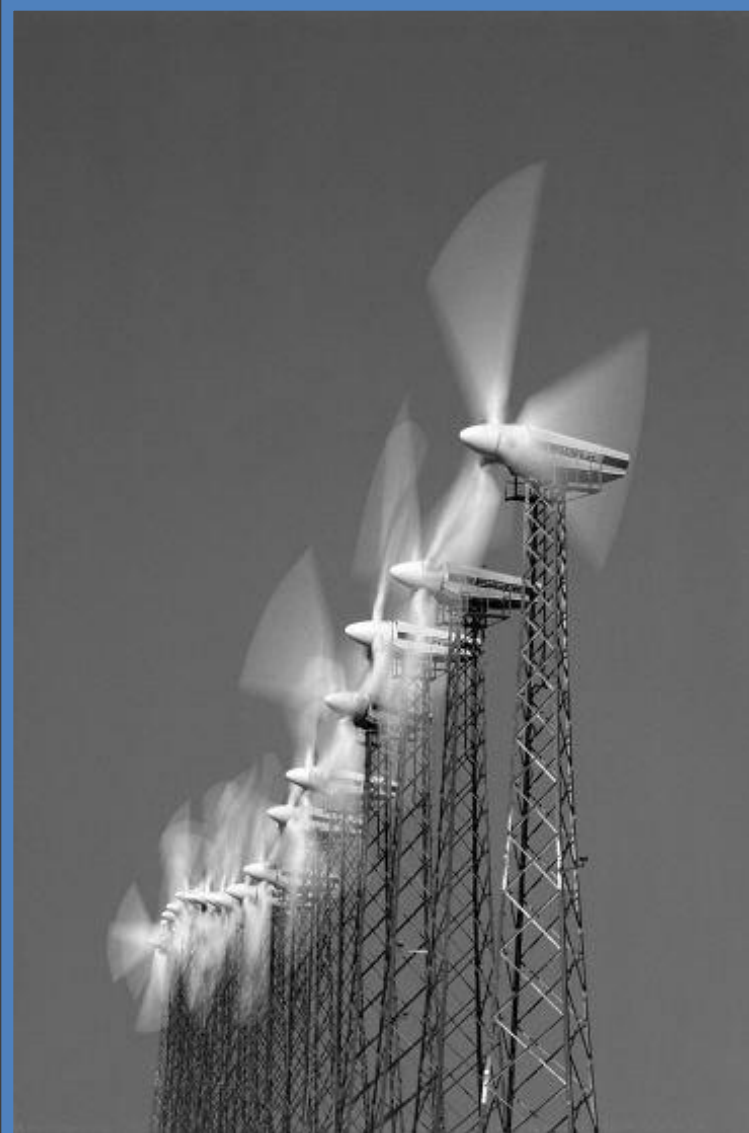




Capítulo 11A – Movimiento Angular

SAI JORGE

© 2012



Las TURBINAS DE VIENTO como éstas pueden generar energía significativa en una forma que es ambientalmente amistosa y renovable. Los conceptos de aceleración rotacional, velocidad angular, desplazamiento angular, inercia rotacional y otros temas que se discuten en este capítulo son útiles para describir la operación de las turbinas de viento.

Objetivos: Después de completar este módulo, deberá:

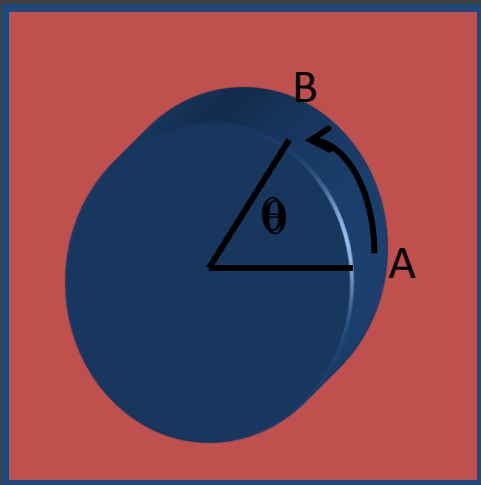
- Definir y aplicar los conceptos de desplazamiento, velocidad y aceleración angular.
- Dibujar analogías que relacionan parámetros de movimiento rotacional (θ , ω , α) con lineal (x , v , a) y resolver problemas rotacionales.
- Escribir y aplicar relaciones entre parámetros lineales y angulares.

Objetivos: (continuación)

- Definir el momento de inercia y aplicarlo para muchos objetos regulares en rotación.
- Aplicar los siguientes conceptos a rotación:
 1. Trabajo, energía y potencia rotacional
 2. Energía cinética y cantidad de movimiento rotacional
 3. Conservación de cantidad de movimiento angular

Desplazamiento rotacional, θ

Considere un disco que rota de A a B:



Desplazamiento angular θ :

Medido en revoluciones, grados o radianes.

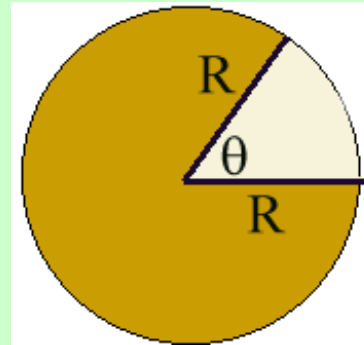
$$1 \text{ rev} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

La mejor medida para rotación de cuerpos rígidos es el **radián**.

Definición del radián

Un **radián** es el ángulo θ subtendido al centro de un círculo por una longitud de arco **s** igual al radio **R** del círculo.

$$\theta = \frac{s}{R}$$



$$1 \text{ rad} = \frac{R}{R} = 57.30^\circ$$

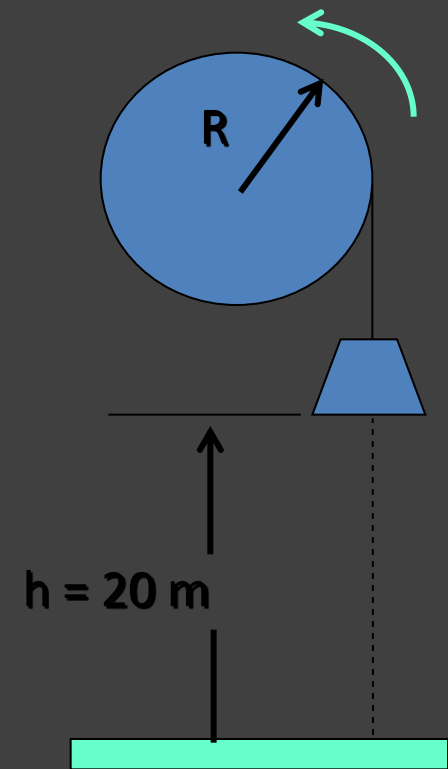
Ejemplo 1: Una cuerda se enrolla muchas veces alrededor de un tambor de **50 cm** de radio. ¿Cuántas revoluciones del tambor se requieren para subir una cubeta a una altura de **20 m**?

$$\theta = \frac{s}{R} = \frac{20 \text{ m}}{0.50 \text{ m}} \quad \theta = 40 \text{ rad}$$

Ahora, 1 rev = 2π rad

$$\theta = (40 \text{ rad}) \left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \right)$$

$$\theta = 6.37 \text{ rev}$$



Ejemplo 2: Una llanta de bicicleta tiene un radio de **25 cm**. Si la rueda da **400 rev**, ¿cuánto habrá recorrido la bicicleta?

$$\theta = (400 \text{ rev}) \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right)$$

$$\theta = 2513 \text{ rad}$$

$$s = \theta R = 2513 \text{ rad} (0.25 \text{ m})$$

$$s = 628 \text{ m}$$



Velocidad angular

La velocidad angular, ω , es la tasa de cambio en el desplazamiento angular.
(radianes por segundo)

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \text{ Velocidad angular en rad/s.}$$

La velocidad angular también se puede dar como la frecuencia de revolución, f (rev/s o rpm):

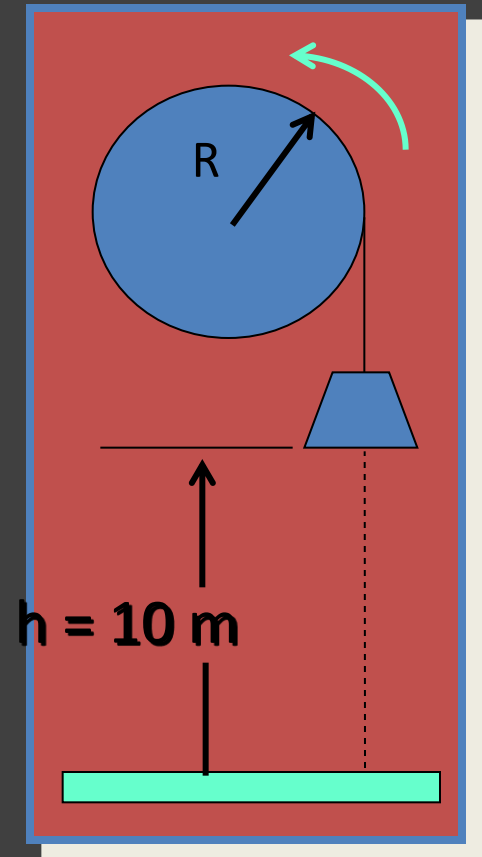
$$\omega = 2\pi f \text{ Frecuencia angular } f \text{ (rev/s).}$$

Ejemplo 3: Una cuerda se enrolla muchas veces alrededor de un tambor de **20 cm** de radio. ¿Cuál es la velocidad angular del tambor si levanta la cubeta a **10 m** en **5 s**?

$$\theta = \frac{s}{R} = \frac{10 \text{ m}}{0.20 \text{ m}} \quad \theta = 50 \text{ rad}$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{50 \text{ rad}}{5 \text{ s}}$$

$$\omega = 10.0 \text{ rad/s}$$



Ejemplo 4: En el ejemplo anterior, ¿cuál es la frecuencia de revolución para el tambor? Recuerde que $\omega = 10.0 \text{ rad/s}$.

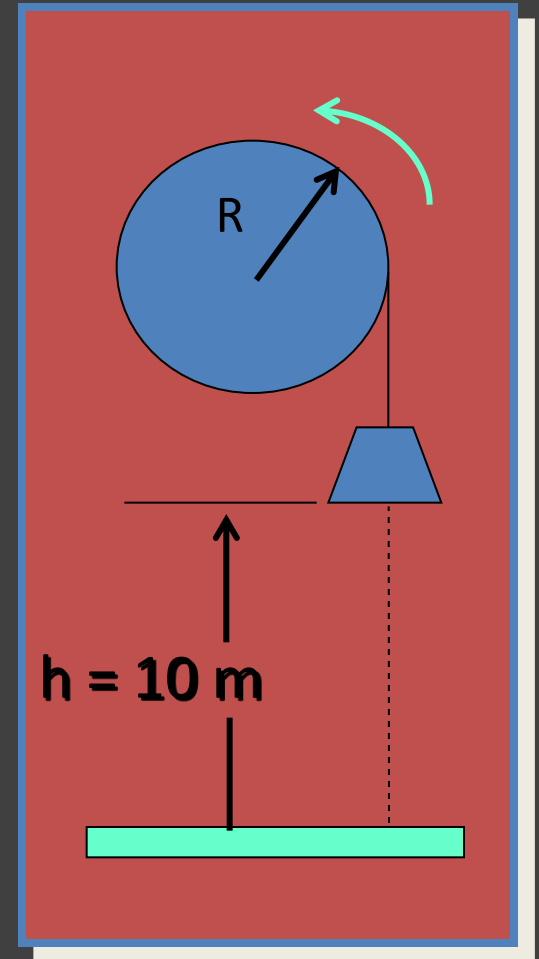
$$\omega = 2\pi f \quad \text{or} \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$f = \frac{10.0 \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad/rev}} = 1.59 \text{ rev/s}$$

O, dado que $60 \text{ s} = 1 \text{ min}$:

$$f = 1.59 \frac{\text{rev}}{\cancel{s}} \left(\frac{60 \cancel{s}}{1 \text{ min}} \right) = 95.5 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$$

$$f = 95.5 \text{ rpm}$$



Aceleración angular

La **aceleración angular** es la tasa de cambio en velocidad angular. (radianes por s por s)

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{Aceleración angular (rad/s}^2\text{)}$$

La aceleración angular también se puede encontrar a partir del cambio en frecuencia, del modo siguiente:

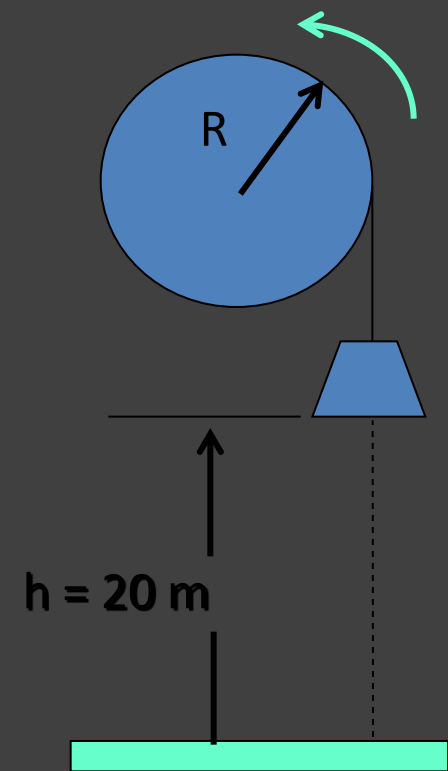
$$\alpha = \frac{2\pi(\Delta f)}{t} \quad \text{pues } \omega = 2\pi f$$

Ejemplo 5: El bloque se levanta desde el reposo hasta que la velocidad angular del tambor es **16 rad/s** después de **4 s**. ¿Cuál es la aceleración angular promedio?

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_o}{t} \quad \text{or} \quad \alpha = \frac{\omega_f}{t}$$

$$\alpha = \frac{16 \text{ rad/s}}{4 \text{ s}} = 4.00 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\alpha = 4.00 \text{ rad/s}^2$$



Rapidez angular y lineal

De la definición de desplazamiento angular :

$s = \theta R$ Desplazamiento lineal contra angular

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta \theta \cdot R}{\Delta t} \right) = \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right) R$$

$$v = \omega R$$

Rapidez lineal = rapidez angular x radio

Aceleración angular y lineal:

De la relación de velocidad se tiene:

$v = \omega R$ Velocidad lineal contra angular

$$v = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta v \cdot R}{\Delta t} \right) = \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) R$$

$$a = \alpha R$$

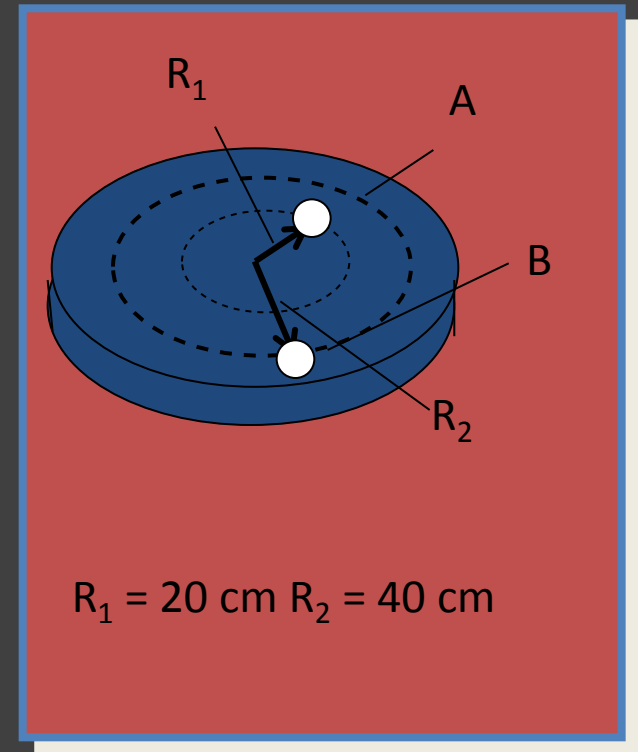
Acel. lineal = Acel. angular x radio

Ejemplo:

Considere disco rotatorio plano:

$$\omega_o = 0; \quad \omega_f = 20 \text{ rad/s} \quad t = 4 \text{ s}$$

¿Cuál es la rapidez lineal final en los puntos A y B?



$$v_{Af} = \omega_{Af} R_1 = (20 \text{ rad/s})(0.2 \text{ m}); \quad v_{Af} = 4 \text{ m/s}$$

$$v_{Bf} = \omega_{Bf} R_2 = (20 \text{ rad/s})(0.4 \text{ m}); \quad v_{Bf} = 8 \text{ m/s}$$

Ejemplo de aceleración

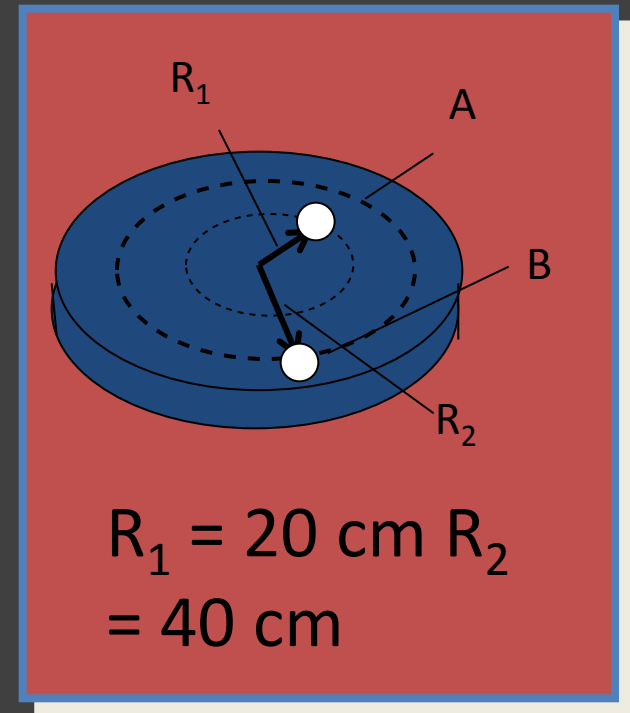
Considere disco rotatorio plano:

$$\omega_o = 0; \quad \omega_f = 20 \text{ rad/s} \quad t = 4 \text{ s}$$

¿Cuáles son las aceleraciones angular y lineal promedio en B?

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_o}{t} = \frac{20 \text{ rad/s}}{4 \text{ s}}$$

$$a = \alpha R = (5 \text{ rad/s}^2)(0.4 \text{ m})$$



$$\alpha = 5.00 \text{ rad/s}^2$$

$$a = 2.00 \text{ m/s}^2$$

Parámetros angulares contra lineales

Recuerde la definición de **aceleración lineal a** de la cinemática.

$$a = \frac{v_f - v_0}{t}$$

Pero $a = \alpha R$ y $v = \omega R$, así que puede escribir:

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} \quad \text{se vuelve}$$

$$\cancel{\alpha} R = \frac{\cancel{R} \omega_f - \cancel{R} \omega_0}{t}$$

La **aceleración angular** es la tasa de cambio en el tiempo de la velocidad angular.

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t}$$

Comparación: lineal contra angular

$$s = \bar{v}t = \left(\frac{v_0 + v_f}{2} \right) t \quad \theta = \bar{\omega}t = \left(\frac{\omega_0 + \omega_f}{2} \right) t$$

$$v_f = v_0 + at \quad \omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

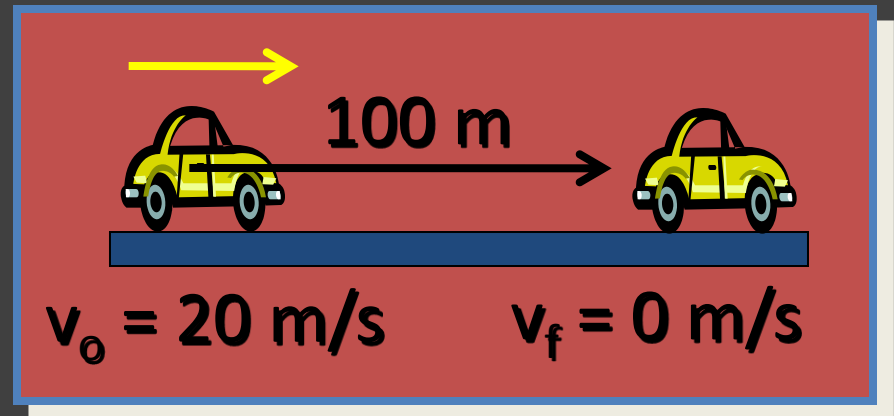
$$s = v_f t - \frac{1}{2} at^2 \quad \theta = \omega_f t - \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$2as = v_f^2 - v_0^2 \quad 2\alpha\theta = \omega_f^2 - \omega_0^2$$

Ejemplo lineal: Un automóvil que inicialmente viaja a **20 m/s** llega a detenerse en una distancia de **100 m**. ¿Cuál fue la aceleración?

Seleccione ecuación:

$$2as = v_f^2 - v_0^2$$



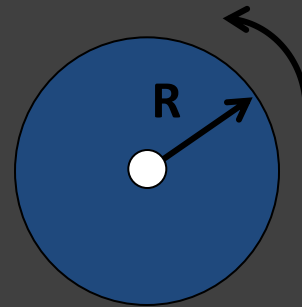
$$a = \frac{0 - v_0^2}{2s} = \frac{-(20 \text{ m/s})^2}{2(100 \text{ m})}$$

$$a = -2.00 \text{ m/s}^2$$

Analogía angular: Un disco ($R = 50 \text{ cm}$), que rota a 600 rev/min llega a detenerse después de dar 50 rev . ¿Cuál es la aceleración?

Seleccione ecuación:

$$2\alpha\theta = \omega_f^2 - \omega_0^2$$



$$\omega_0 = 600 \text{ rpm}$$

$$\omega_f = 0 \text{ rpm}$$

$$\theta = 50 \text{ rev}$$

$$600 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 62.8 \text{ rad/s} \quad 50 \text{ rev} = 314 \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{0 - \omega_0^2}{2\theta} = \frac{-(62.8 \text{ rad/s})^2}{2(314 \text{ rad})}$$

$$\alpha = -6.29 \text{ m/s}^2$$

Estrategia para resolución de problemas:

- Dibuje y etiquete bosquejo de problema.
- Indique dirección + de rotación.
- Mencione lo dado y establezca lo que debe encontrar.

Dado: _____, _____, _____ ($\theta, \omega_o, \omega_f, \alpha, t$)

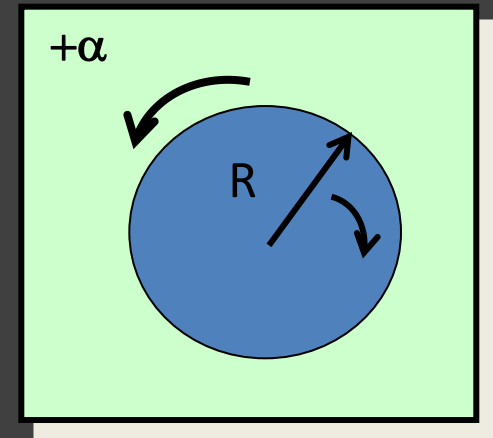
Encontrar: _____, _____

- Selecciones la ecuación que contenga una y no la otra de las cantidades desconocidas y resuelva para la incógnita.

Ejemplo 6: Un tambor rota en sentido de las manecillas del reloj inicialmente a **100 rpm** y experimenta una aceleración constante en dirección contraria de **3 rad/s²** durante **2 s**. ¿Cuál es el desplazamiento angular?

Dado: $\omega_o = -100 \text{ rpm}$; $t = 2 \text{ s}$ $\alpha = +2 \text{ rad/s}^2$

$$100 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right) = 10.5 \text{ rad/s}$$



$$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = (-10.5)(2) + \frac{1}{2} (3)(2)^2$$

$$\theta = -20.9 \text{ rad} + 6 \text{ rad}$$

$$\theta = -14.9 \text{ rad}$$

El desplazamiento neto es en dirección de las manecilla del reloj (-)

Resumen de fórmulas para rotación

$$s = \bar{v}t = \left(\frac{v_0 + v_f}{2} \right) t \quad \theta = \bar{\omega}t = \left(\frac{\omega_0 + \omega_f}{2} \right) t$$

$$v_f = v_o + at \quad \omega_f = \omega_o + \alpha t$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$s = v_f t - \frac{1}{2} at^2 \quad \theta = \omega_f t - \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$2as = v_f^2 - v_0^2 \quad 2\alpha\theta = \omega_f^2 - \omega_0^2$$

CONCLUSIÓN: Capítulo 11A

Movimiento Angular

