Capítulo 10. Movimiento circular uniforme

ESPOL

Aceleración centrípeta

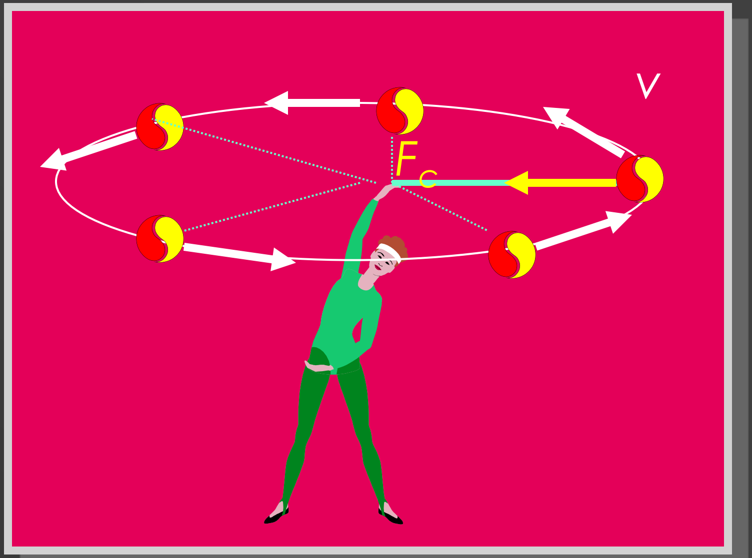
Fuerzas centrípetas mantienen la trayectoria circular de estos niños.

Objetivos: Después de completar este módulo, deberá:

- Aplicar sus conocimientos sobre aceleración y fuerza centrípeta en la solución de problemas de movimiento circular.
- Definir y aplicar los conceptos de frecuencia y periodo, y relacionarlos con la velocidad lineal.
- Solucionar problemas de ángulos de peralte, péndulo cónico y círculo vertical.

Movimiento circular uniforme

Movimiento circular uniforme *se realiza en trayectoria circular sin cambio en la velocidad, sólo cambia la dirección.*

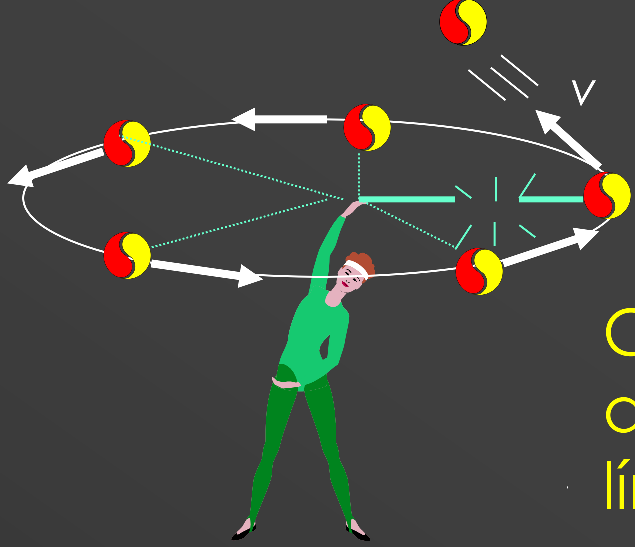


- *Velocidad constante tangente a la trayectoria*
- *Fuerza constante hacia el centro.*

Pregunta: ¿alguna fuerza empuja hacia afuera al balón?

Movimiento circular uniforme (cont.)

La pregunta sobre la fuerza hacia afuera se resuelve al observar lo que sucede ¡cuando se rompe la cuerda!



El balón se mueve tangente a la trayectoria, NO hacia afuera, como se esperaba.

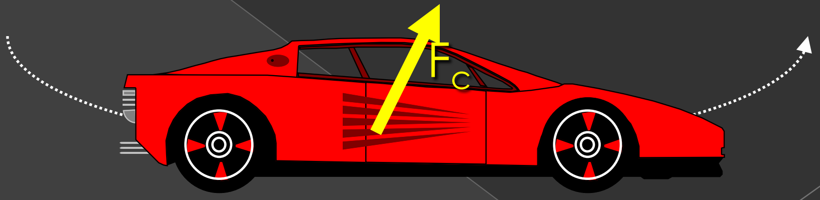
Cuando la fuerza central desaparece, el balón continúa en línea recta.

La fuerza centrípeta es necesaria para cambiar de dirección

Ejemplos de fuerza centrípeta

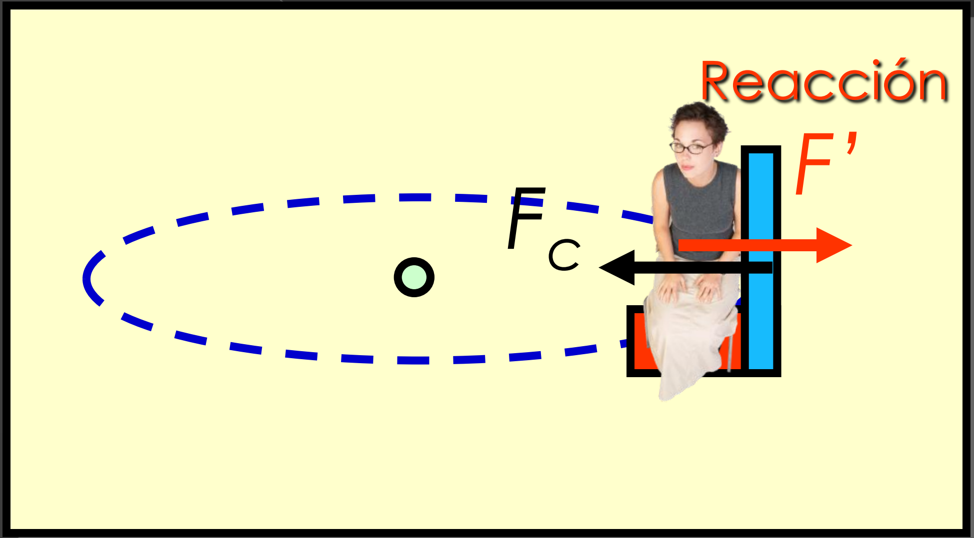
Usted se encuentra sentado cerca de la puerta. ¿Cuál es la dirección de las fuerzas resultantes sobre usted al virar? ¿Es alejado del centro o hacia el centro de la vuelta?

- El carro vira en una curva.



La fuerza SOBRE usted es hacia el centro.

Continuación del ejemplo

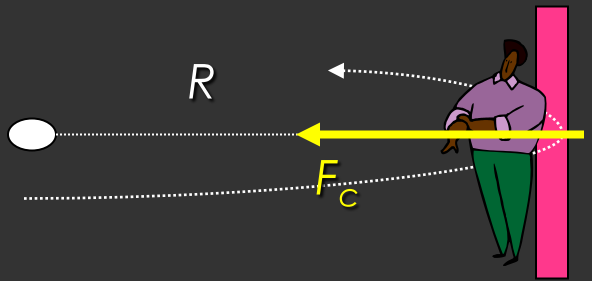


La fuerza centrípeta es ejercida POR la puerta SOBRE usted. (hacia el centro)

Hay una fuerza hacia el exterior, pero no actúa SOBRE usted. Es la fuerza de reacción ejercida POR usted SOBRE la puerta. Sólo afecta la puerta.

Otro ejemplo

- Empuje sobre el muro.

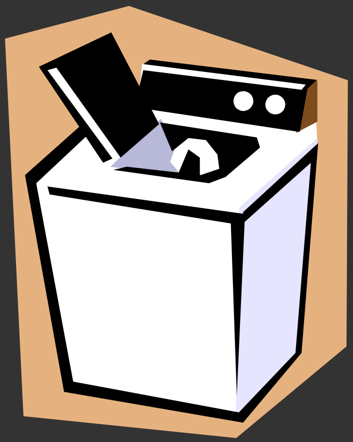


¿Qué fuerzas centrípetas se ejercen en este ejemplo y sobre qué actúan?

La fuerza centrípeta es ejercida POR el muro SOBRE el hombre. Una fuerza de reacción es ejercida por el hombre sobre el muro, pero no determina el movimiento de éste.

Ciclo de rotación en lavadora

¿Cuánta agua circula entre la ropa durante el ciclo de lavado?

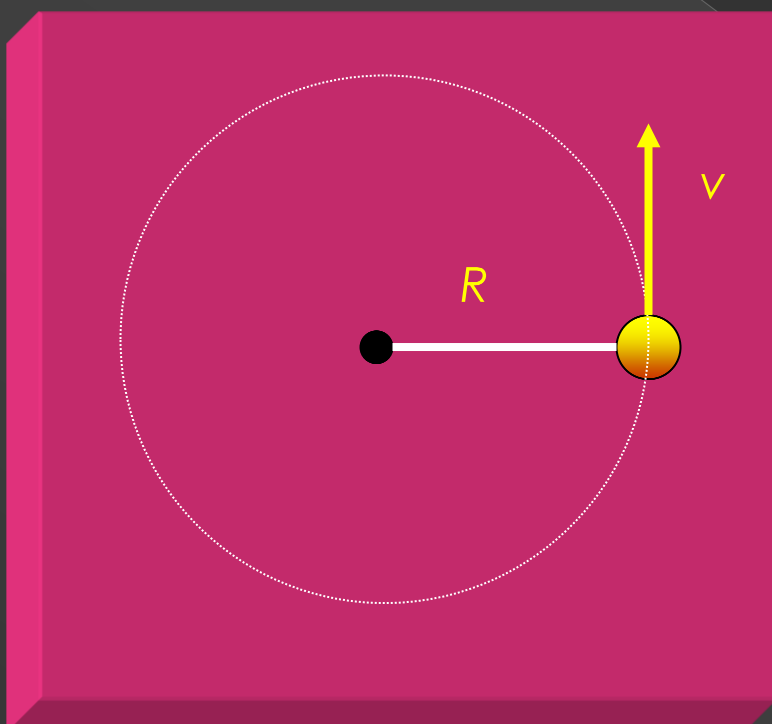


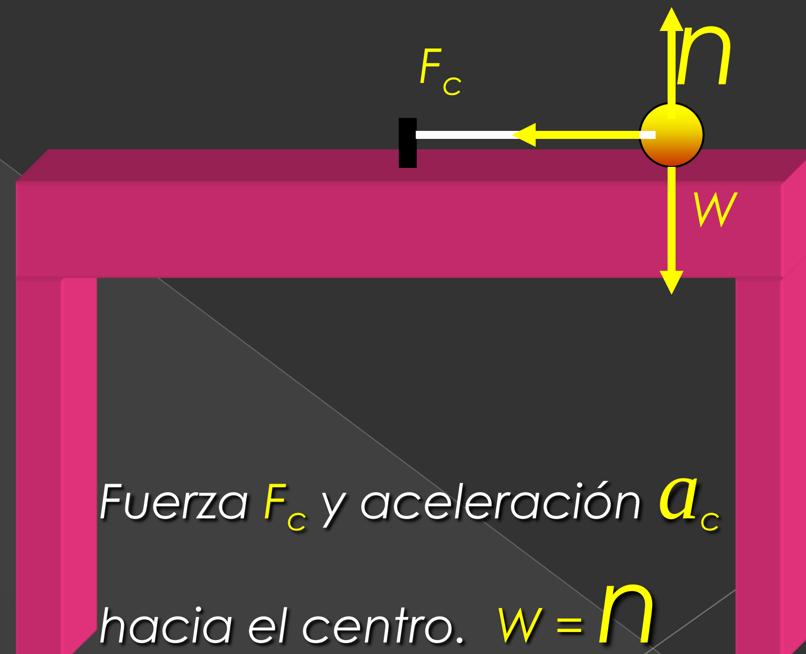
Piense antes de responder. . . ¿La fuerza centrípeta hace circular el agua entre la ropa?

NO. De hecho, es la FALTA de esta fuerza lo que lleva a la ropa hacia los hoyos de la pared circular de la lavadora.

Aceleración centrípeta

Tiene una pelota en movimiento con velocidad constante v en un círculo horizontal de radio R atada con una cuerda a una pértiga al centro de una mesa. (Suponga fricción cero.)



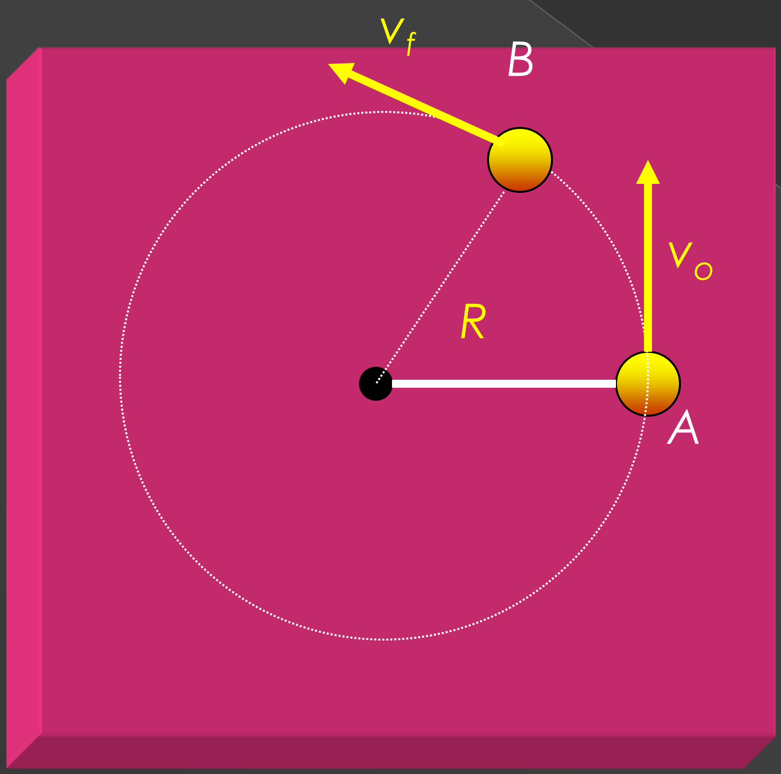


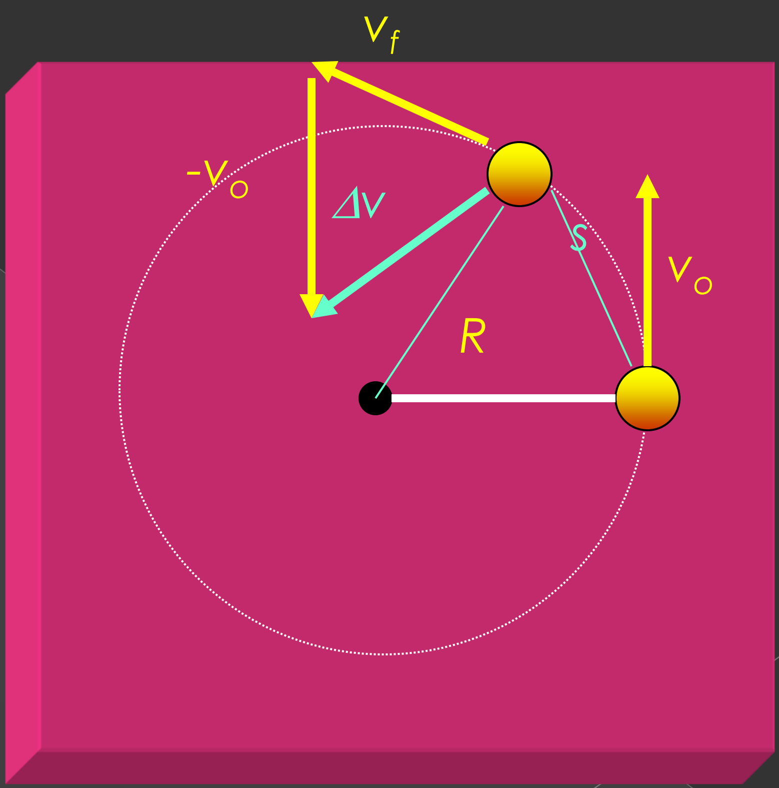
Fuerza F_c *y aceleración* a_c

hacia el centro. $W = n$

Aceleración central

Considere la velocidad inicial en A y la velocidad final en B:



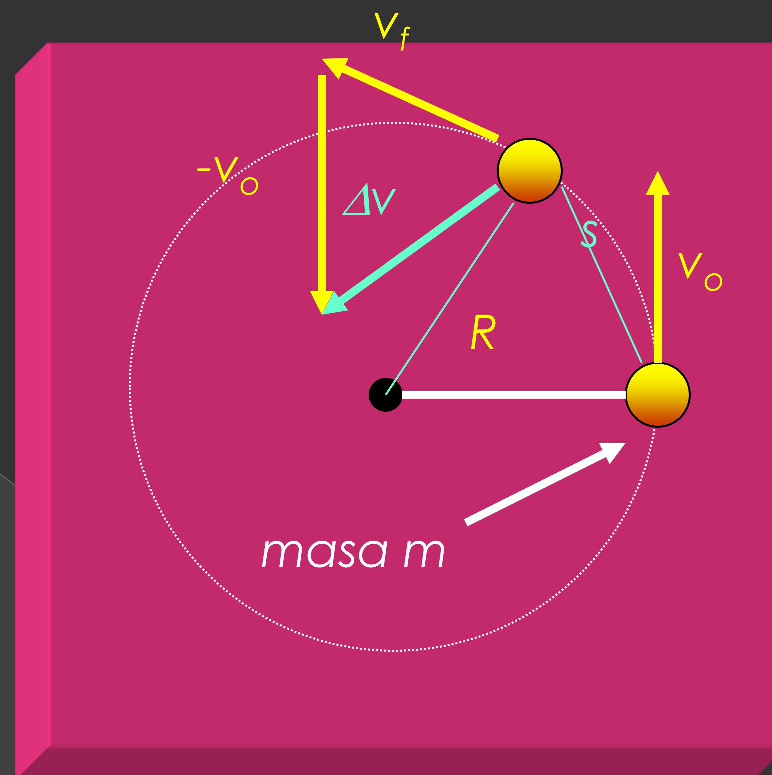


Aceleración (cont.)

Definición: $a_c = \frac{\Delta v}{t}$

Triángulos similares $\frac{\Delta v}{v} = \frac{s}{R}$

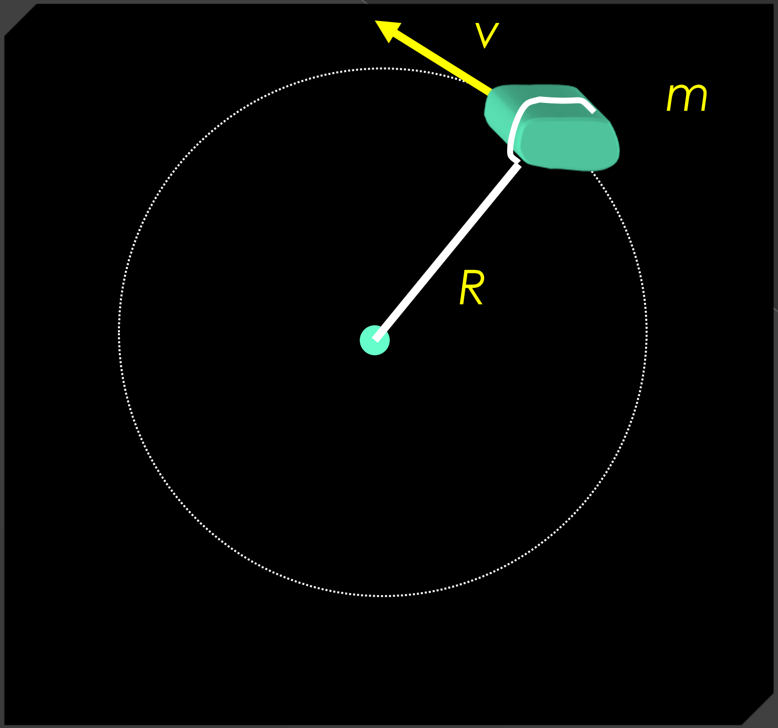
$a_c = \frac{\Delta v}{t} = \frac{vs}{Rt} = \frac{vv}{R}$



Aceleración centrípeta:

$$a_c = \frac{v^2}{R}; \qquad F_c = ma_c = \frac{mv^2}{R}$$

Ejemplo 1: Una piedra de 3-kg gira en un círculo con radio de 5 m. Si la velocidad constante es de 8 m/s, ¿cuál es la aceleración centrípeta?



$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

m = 3 kg

R = 5 m; v = 8 m/s

$$a_c = \frac{(8 \text{ m/s})^2}{5 \text{ m}} = 12.8 \text{ m/s}^2$$

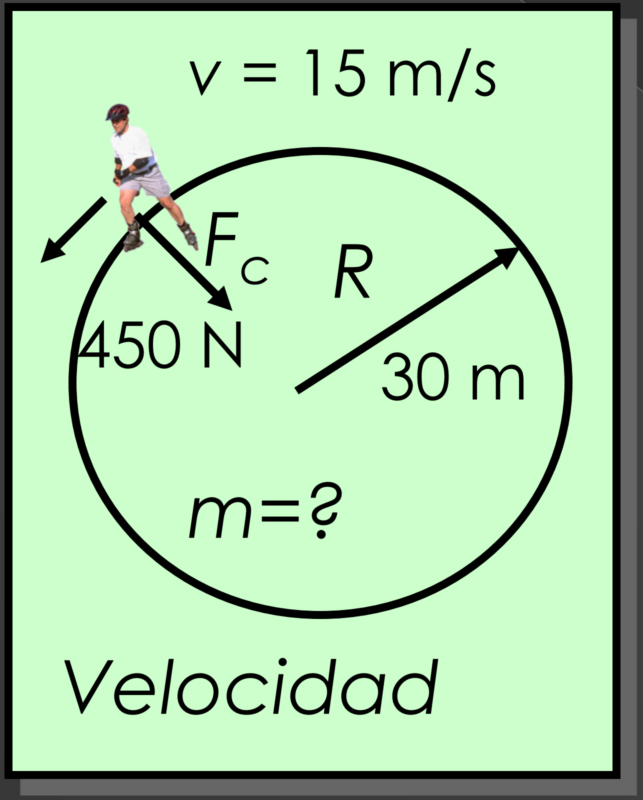
F = (3 kg)(12.8 m/s²)

$$F_c = ma_c = \frac{mv^2}{R}$$

F_c = 38.4 N

Ejemplo 2: Pedro patina a 15 m/s en un círculo con radio de 30 m. El hielo ejerce una fuerza central de 450 N. ¿Cuál es la masa de Pedro?

Dibuje el boceto



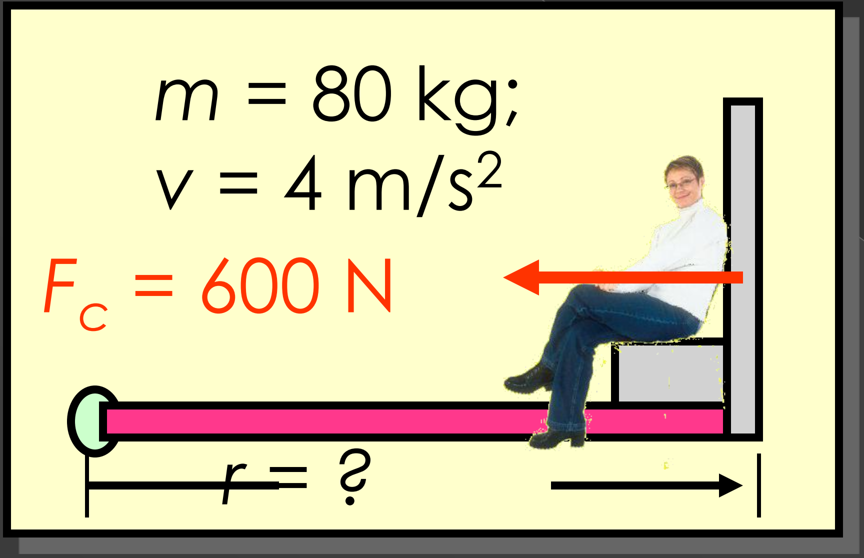
$$F_c = \frac{mv^2}{R}; \quad m = \frac{F_c R}{v^2}$$

$$m = \frac{(450\ \text{N})(30\ \text{m})}{(15\ \text{m/s})^2}$$

$$\boxed{m = 60.0\ \text{kg}}$$

Ejemplo 3. El muro ejerce 600 N de fuerza en una persona de 80-kg con movimiento de 4 m/s en una plataforma circular. ¿Cuál es el radio de la trayectoria circular?

Dibuja un boceto



Segunda ley de Newton para el movimiento circular:

$$F = \frac{mv^2}{r}; \quad r = \frac{mv^2}{F}$$

$$r = \frac{(80\text{ kg})(4\text{ m/s})^2}{600\text{ N}}$$

r = 2.13 m

Un auto con giro suave

¿Cuál es la dirección de la fuerza SOBRE el carro?

Resp. <u>Hacia el centro</u>

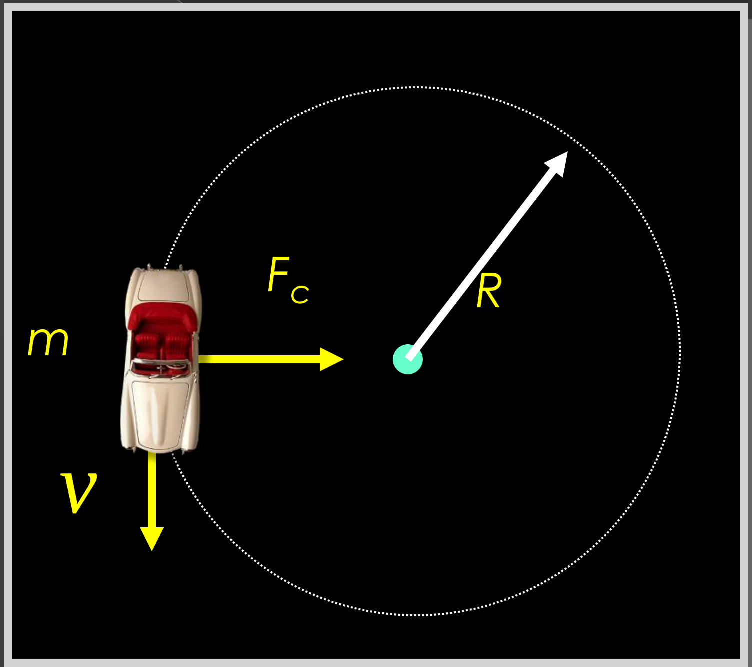
Esta fuerza central es ejercida POR el camino SOBRE el auto.

Un auto con giro suave

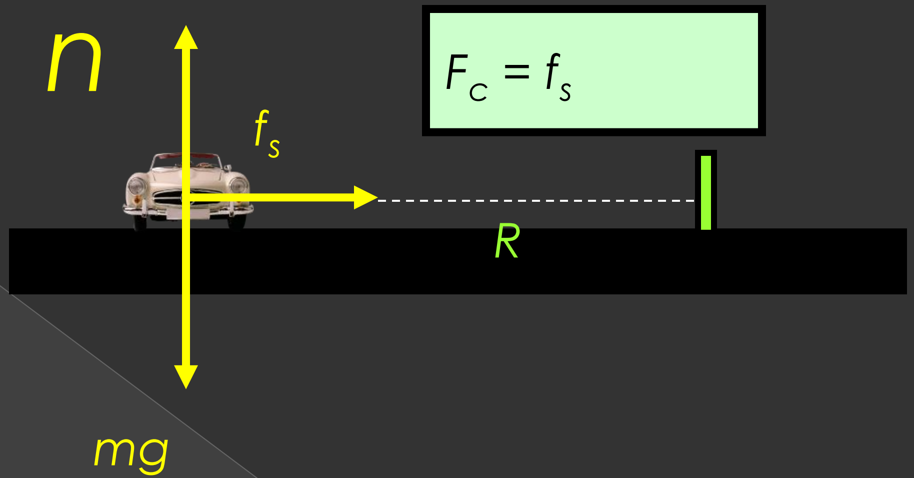
¿Hay alguna fuerza hacia afuera SOBRE el auto?

Resp. No, pero el auto no ejerce una fuerza de reacción hacia afuera SOBRE el camino.

Un auto con giro suave

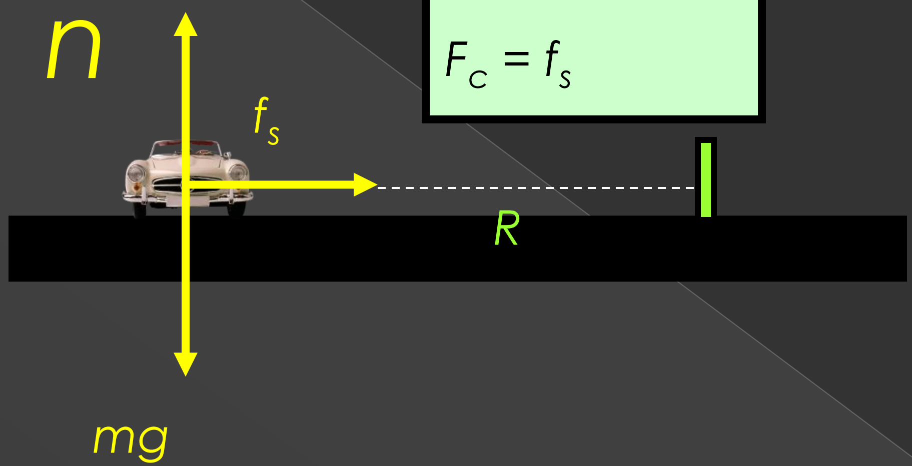


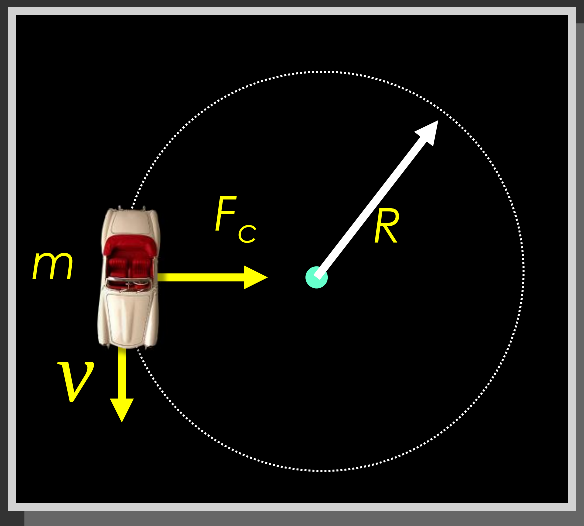
La fuerza centrípeta F_c se debe a la fricción estática f_s:



La fuerza centrípeta F_C y la fuerza de fricción f_s No son dos fuerzas distintas. Sólo hay una fuerza sobre el auto. La naturaleza de esta fuerza central es su fricción estática.

Encuentre la velocidad máxima para dar una vuelta sin derrapar.

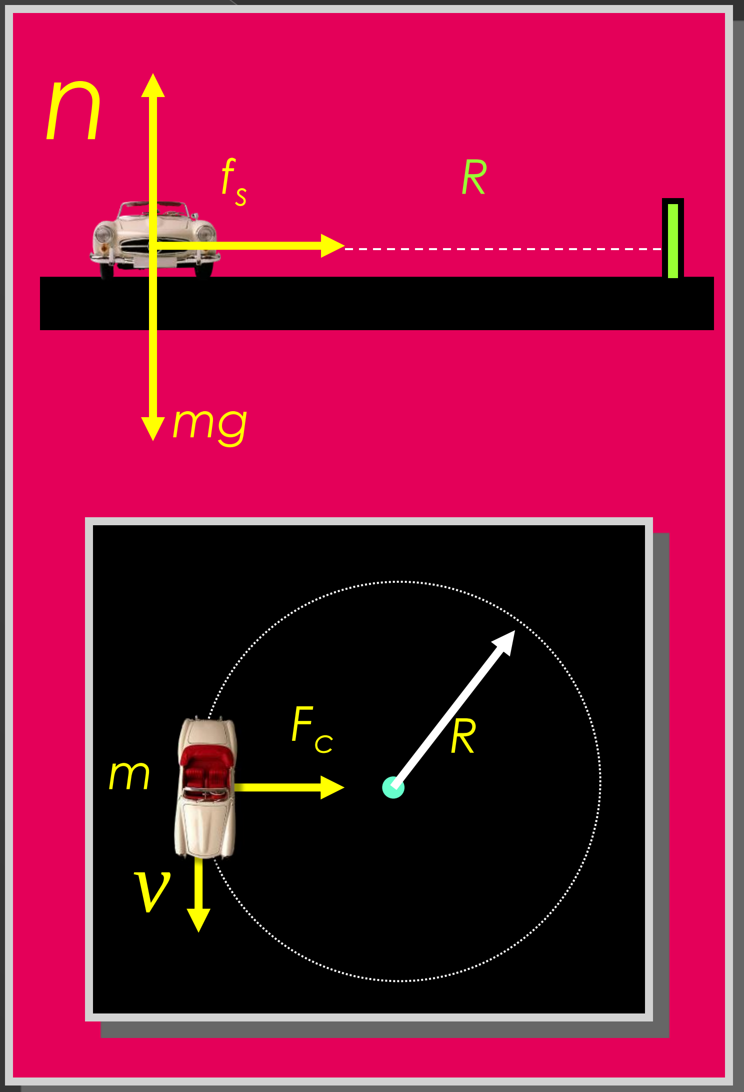




El auto está a punto de derrapar cuando F_C es igual a la fuerza máxima de la fricción estática f_s.

$F_C = f_s$ $\qquad$ $F_C = \dfrac{mv^2}{R}$ $\qquad$ $f_s = \mu_s mg$

Velocidad máxima sin derrapar (cont.)



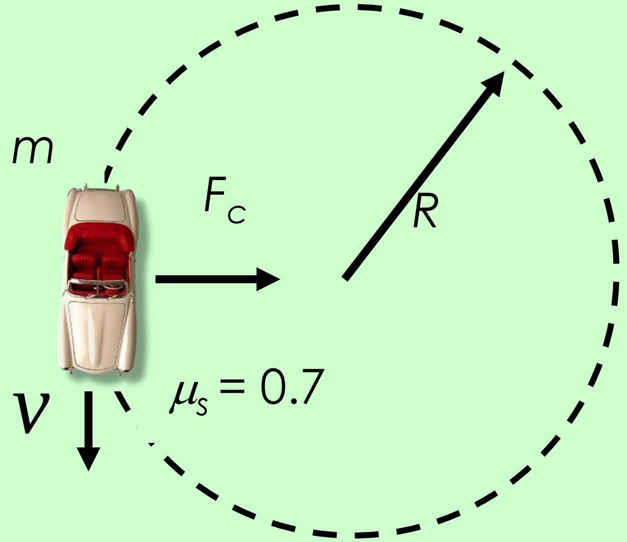
$$F_c = f_s$$

$$\frac{mv^2}{R} = \mu_s mg$$

$$v = \sqrt{\mu_s g R}$$

La velocidad v es la aceleración máxima para no derrapar.

Ejemplo 4: Un auto da vuelta con un radio de 70 m si el coeficiente de la fricción estática es 0.7. ¿Cuál es la aceleración máxima sin derrapar?



$$F_c = \frac{mv^2}{R} \qquad f_s = \mu_s mg$$

De donde:

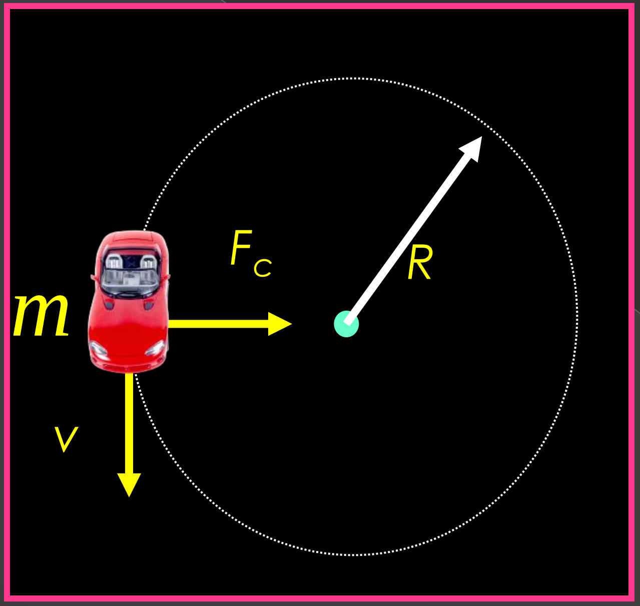
$$v = \sqrt{\mu_s g R}$$

$g = 9.8\ \text{m/s}^2$; $R = 70$ m

$$v = \sqrt{\mu_s g R} = \sqrt{(0.7)(9.8)(70\,\text{m})}$$

v = 21.9 m/s

Peralte óptimo



Para el peralte de una curva con ángulo óptimo, la fuerza normal n da la fuerza centrípeta necesaria para no requerir una fuerza de fricción.

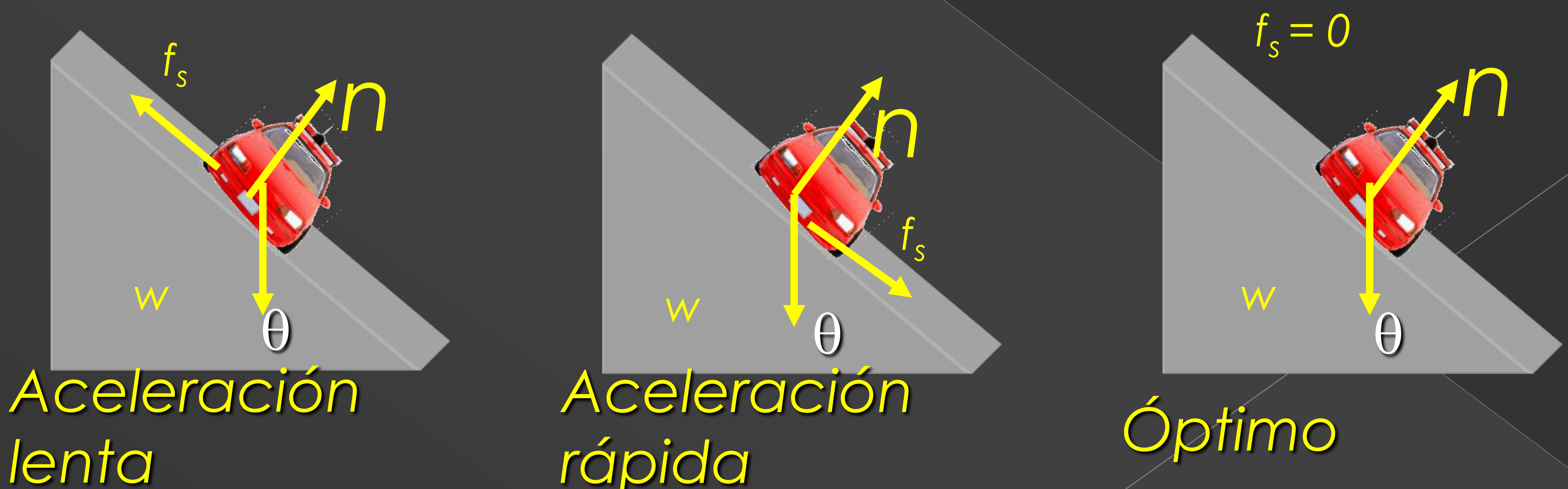
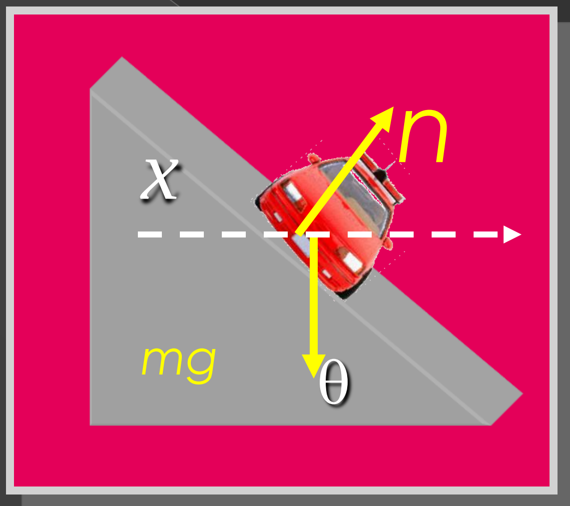
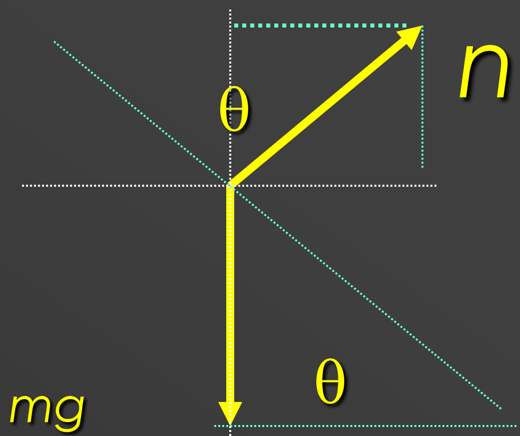
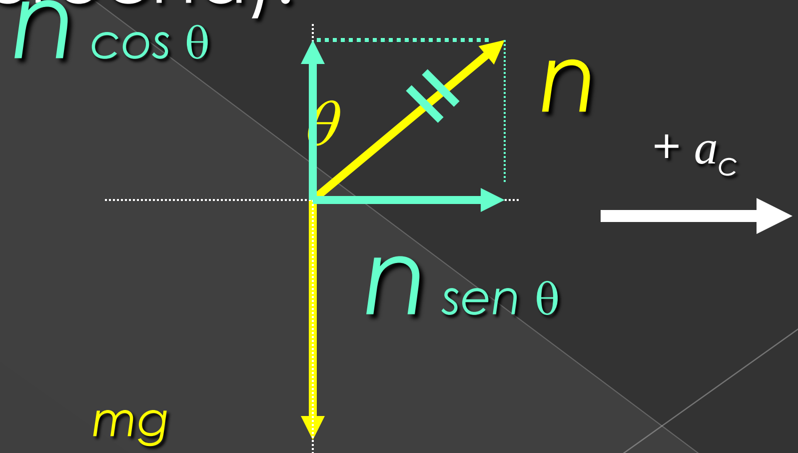


Diagrama de un cuerpo libre

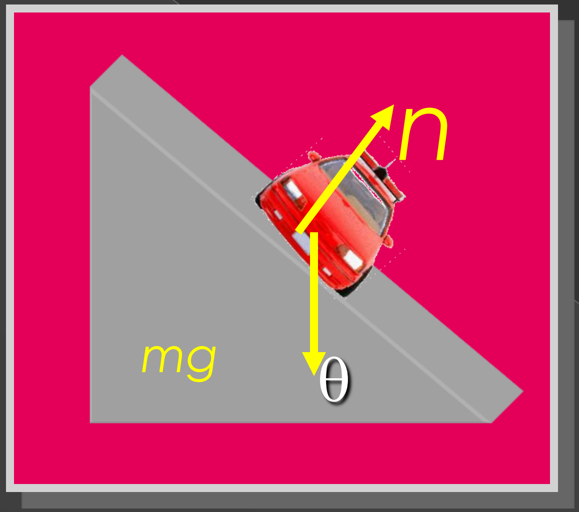


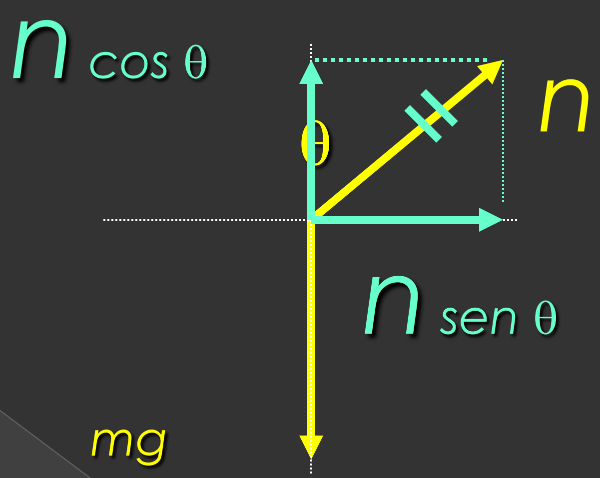
La aceleración a es hacia el centro. Sea x el eje a lo largo de la dirección de a_c , i. e., horizontal (izquierda a derecha).





Peralte óptimo (cont.)



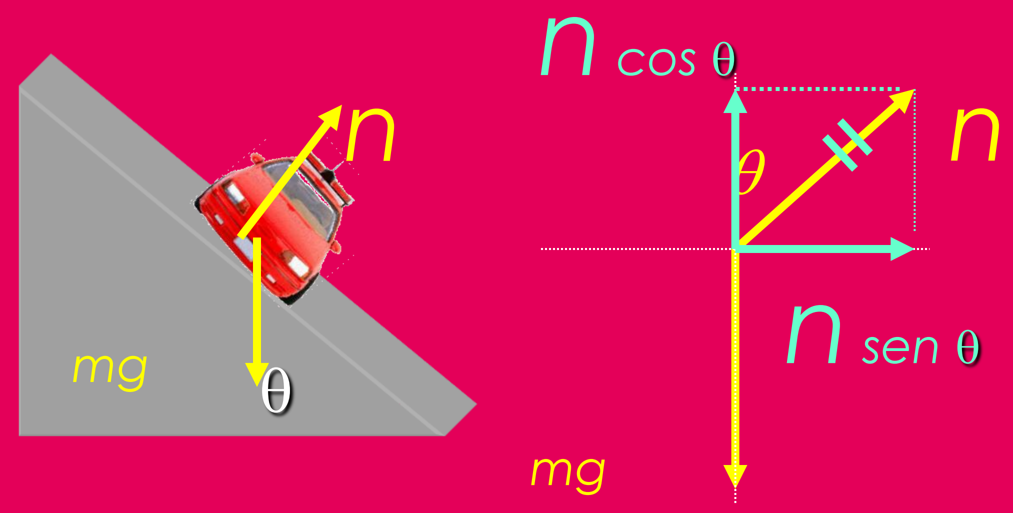


Aplique la segunda ley de Newton a los ejes x y y.

$\Sigma F_x = m a_c$ $\qquad n \operatorname{sen}\theta = \dfrac{mv^2}{R}$

$\Sigma F_y = 0$ $\qquad n \cos\theta = mg$

Peralte óptimo (cont.)



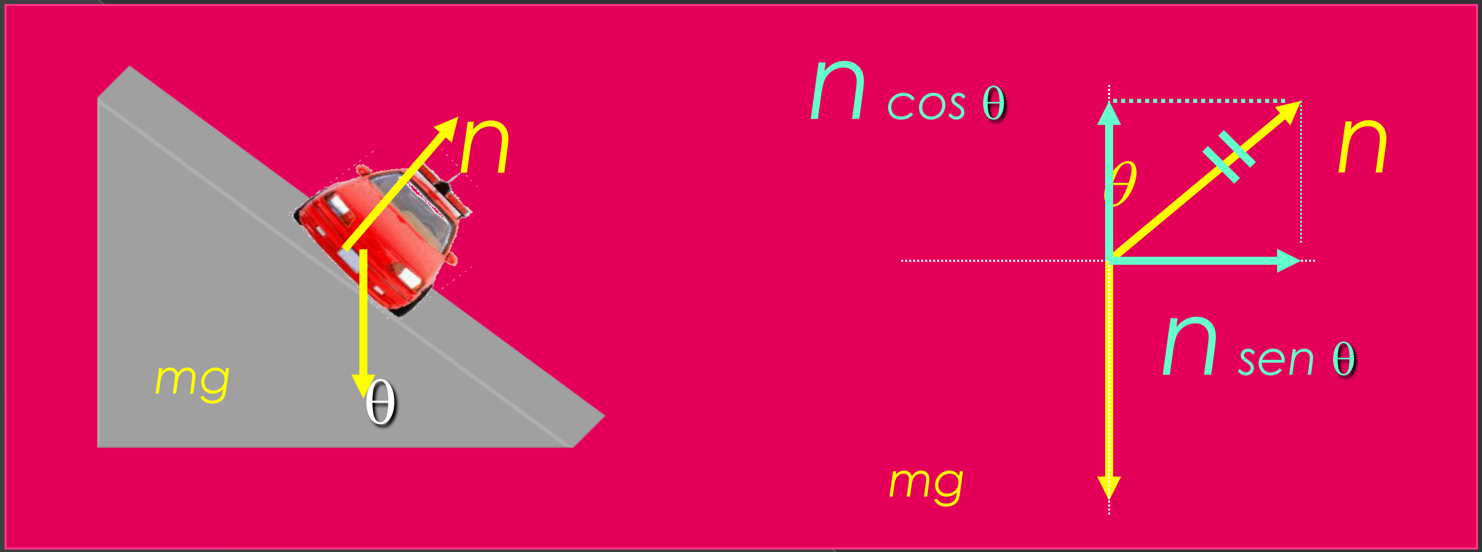
$$\tan\theta = \frac{n\sin\theta}{n\cos\theta}$$

$$n \text{ sen } \theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$n \cos\theta = mg$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{\cancel{m}v^2}{R}}{\frac{\cancel{m}g}{1}} = \frac{v^2}{gR}$$

Peralte óptimo (cont.)

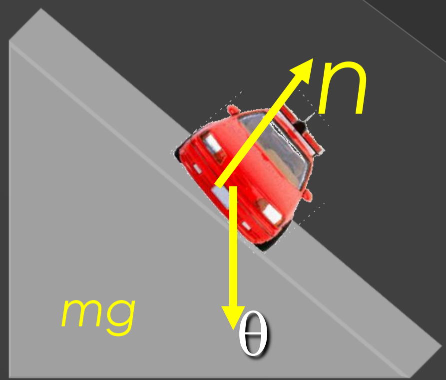


$\tan\theta = \frac{n\sin\theta}{n\cos\theta}$

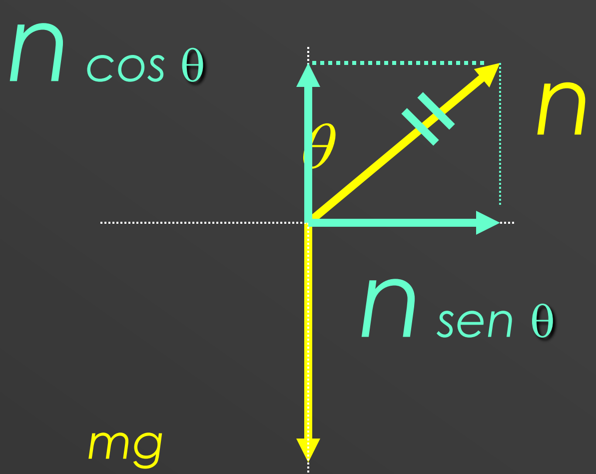
Peralte óptimo θ

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$$

Ejemplo 5: Un auto da una vuelta con radio de 80 m. ¿Cuál es el peralte óptimo para esta curva si la velocidad es igual a 12 m/s?



$$\tan\theta = \frac{v^2}{gR} = \frac{(12\ \text{m/s})^2}{(9.8\ \text{m/s}^2)(80\ \text{m})}$$



$\tan\theta = 0.184$

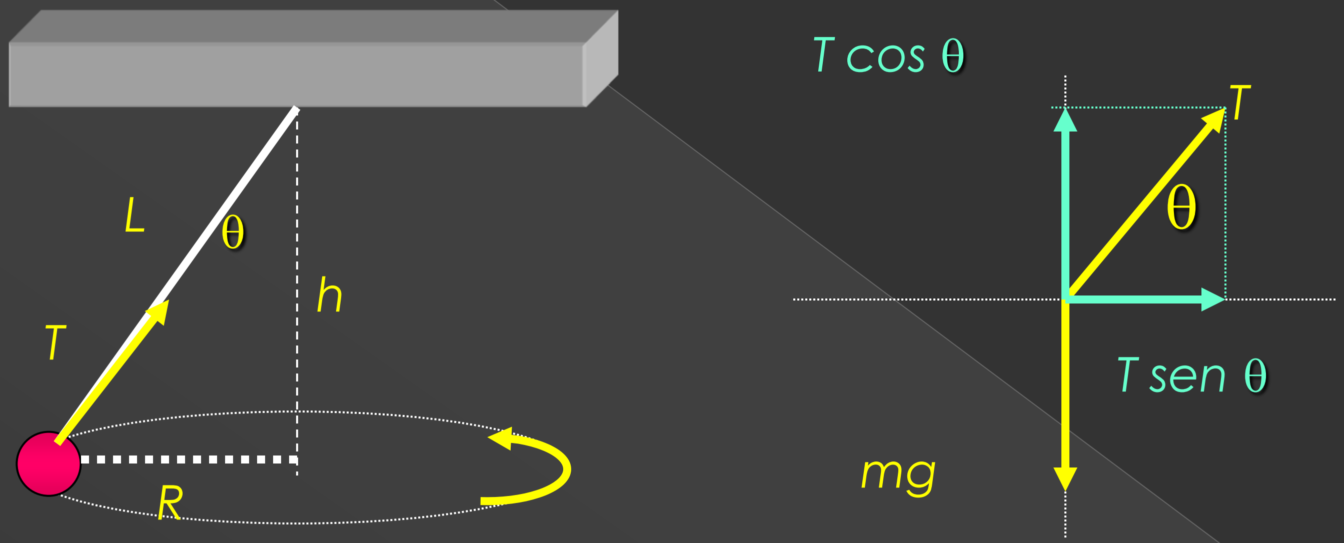
$\theta = 10.40$

$$F_C = \frac{mv^2}{R}$$

¿Cómo encuentra la fuerza centrípeta sobre el carro, conociendo su masa?

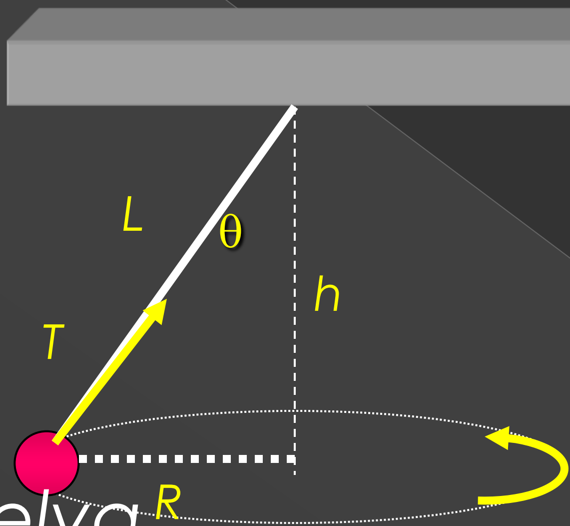
El péndulo cónico

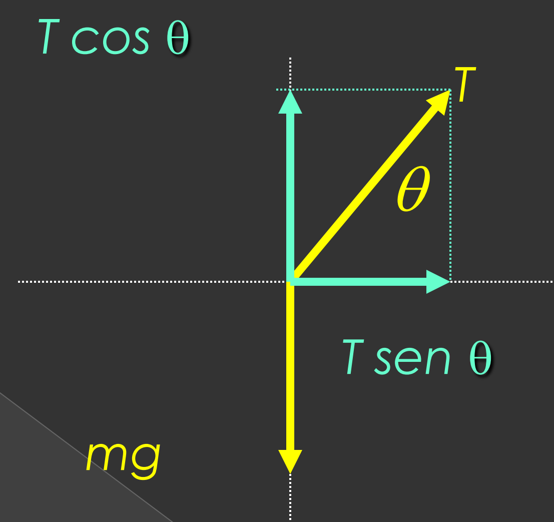
Un péndulo cónico consiste de una masa m giratoria en un círculo horizontal de radio R al extremo de una cuerda de largo L.



Nota: El componente interior de la tensión T sen θ requiere una fuerza central.

Ángulo θ y velocidad v:





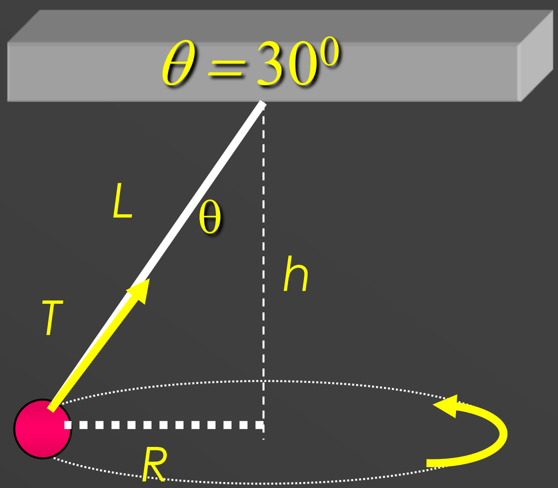
Resuelva las dos ecuaciones para encontrar el ángulo θ

$$T \operatorname{sen} \theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$T \cos \theta = mg$$

$$\tan \theta = \frac{v^2}{gR}$$

Ejemplo 6: Una masa de 2-kg gira en un círculo horizontal atada al extremo de una cuerda de 10 m de largo. ¿Cuál es la velocidad constante de la masa si la cuerda hace un ángulo de 30^0 con la vertical?



1. Dibuje y trace un boceto.

2. Recuerde la fórmula del péndulo.

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$$

Halle: $v = ?$

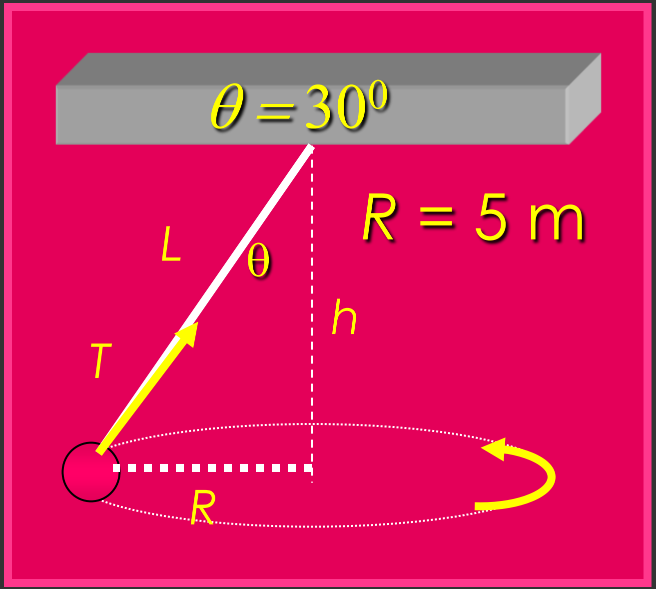
3. Para esta fórmula, debe encontrar R = ?

$R = L \text{ sen } 30^0 = (10 \text{ m})(0.5)$

$R = 5 \text{ m}$

Ejemplo 6 (cont.): Halle v para θ = 30^0

4. Use los datos para encontrar la velocidad a 30^0.



R = 5 m   *g* = 9.8 m/s^2

Encuentre v = ?

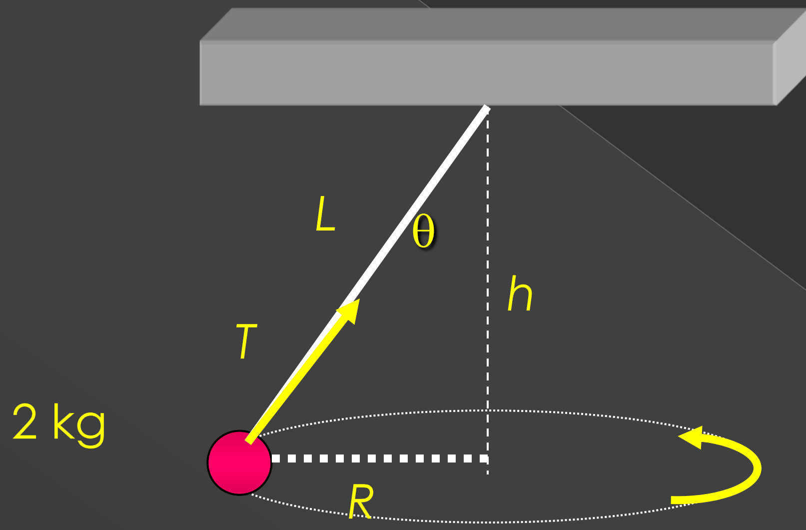
$$\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$$

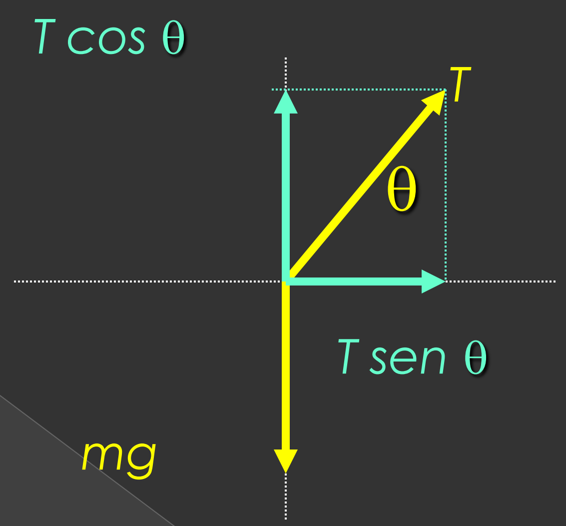
$$v^2 = gR\tan\theta \qquad v = \sqrt{gR\tan\theta}$$

$$v = \sqrt{(9.8\text{ m/s}^2)(5\text{ m})\tan 30^0}$$

v = 5.32 m/s

Ejemplo 7: Ahora halle la tensión T en la cuerda si m = 2 kg, $\theta = 30^0$, y L = 10 m.



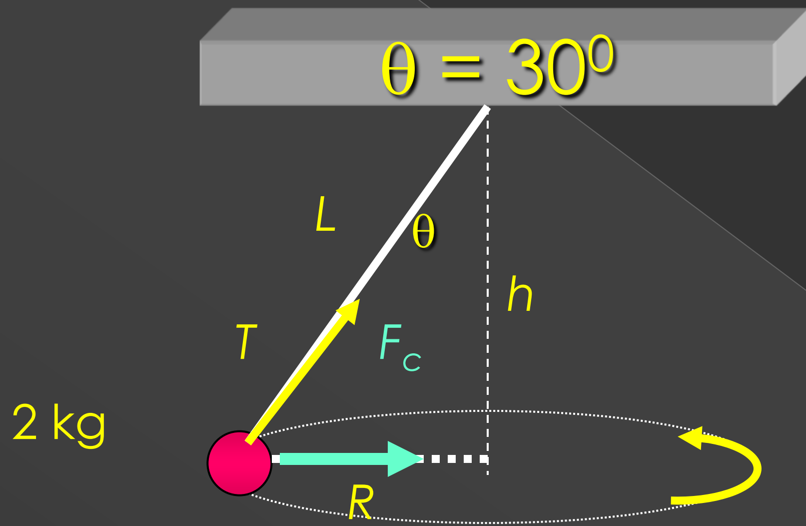


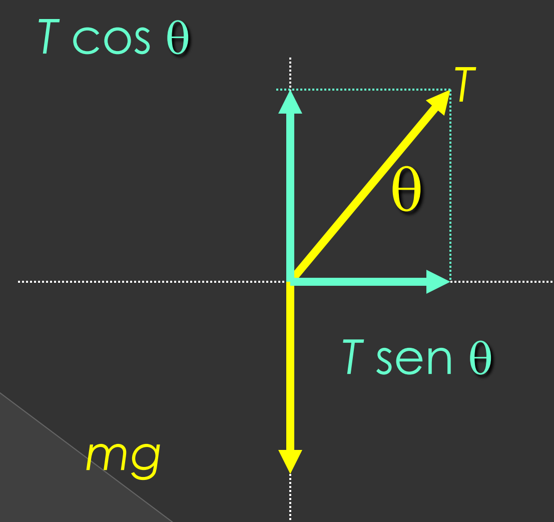
$$\Sigma F_y = 0: \quad T\cos\theta - mg = 0; \quad T\cos\theta = mg$$

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} \qquad \frac{(2\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}{\cos 30^0}$$

$T = 22.6$ N

Ejemplo 8: Halle la fuerza centrípeta F_C para el ejemplo.



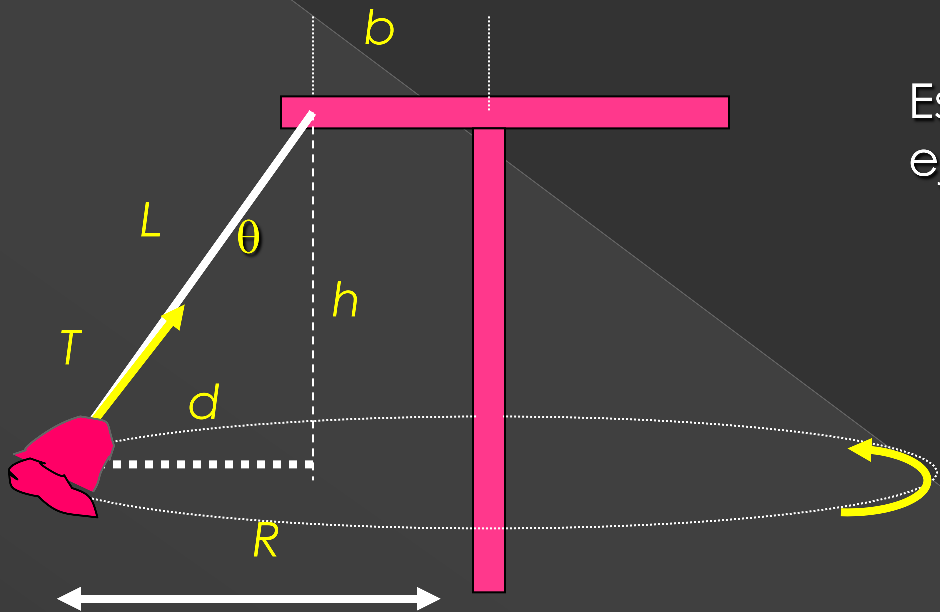


m = 2 kg; v = 5.32 m/s; R = 5 m; T = 22.6 N

$$F_C = \frac{mv^2}{R} \quad \text{or} \quad F_C = T \text{ sen } 30^0$$

F_C = 11.3 N

Sillas giratorias



Este problema es idéntico a los otros ejemplos, excepto que debe hallar R.

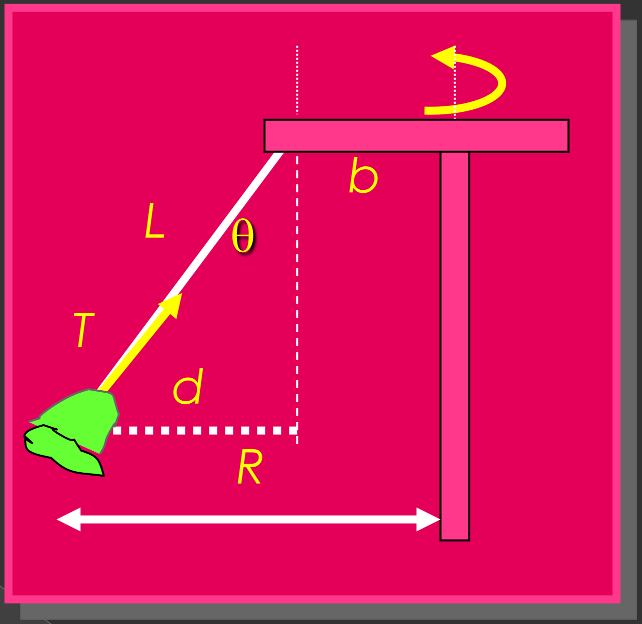
$$R = d + b$$

$$R = L \operatorname{sen} \theta + b$$

$$\tan \theta = \frac{v^2}{gR} \quad y \quad v = \sqrt{gR \tan \theta}$$

Ejemplo 9. Si *b* = 5 m y *L* = 10 m, ¿cuál será la velocidad si el ángulo es $\theta = 26^0$?

$\tan \theta = \frac{v^2}{gR}$ $\quad R = d + b$



$d = (10 \text{ m}) \text{ sen } 26^0 = 4.38 \text{ m}$

$R = 4.38 \text{ m} + 5 \text{ m} = 9.38 \text{ m}$

$$v^2 = gR\tan\theta \qquad v = \sqrt{gR\tan\theta}$$

$$v = \sqrt{(9.8 \text{ m/s}^2)(9.38 \text{ m})\tan 26^0}$$

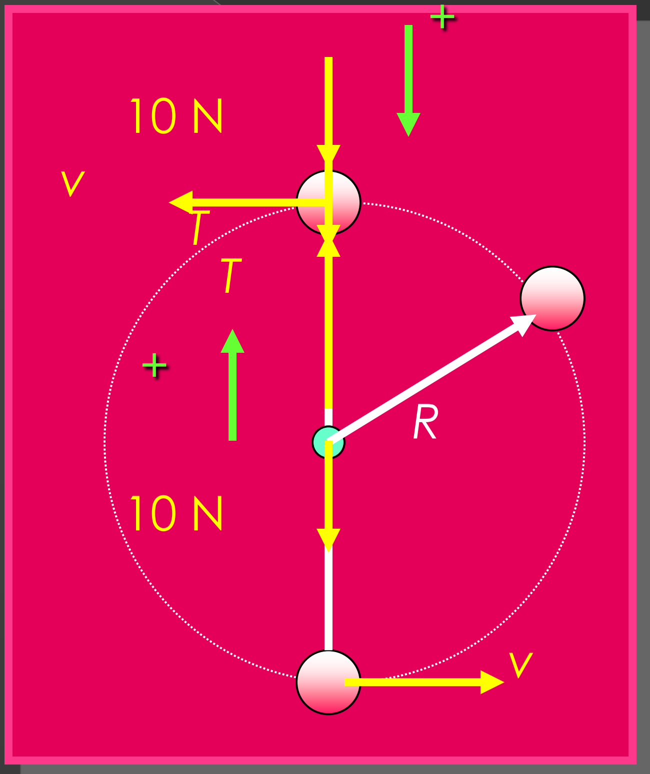
v = 6.70 m/s

Movimiento en círculo vertical

Considere las fuerzas en una pelota sujeta a una cuerda que da una vuelta vertical.

Note que la dirección positiva siempre es de aceleración, i.e., hacia el centro del círculo.

Dé click en el mouse para ver las nuevas posiciones.



Como ejercicio, suponga que la fuerza central de $F_c = 40$ N es requerida para mantener el mivimiento circular de la pelota y V

La tensión T ajusta, así que el resultante central es 40 N.

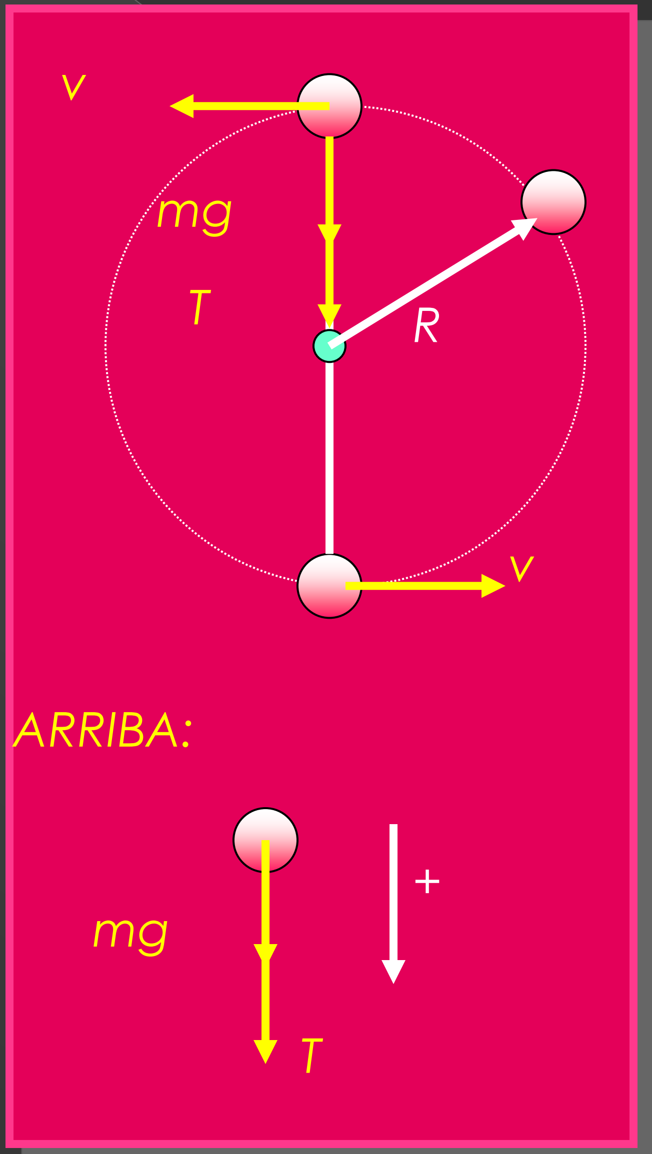
Arriba: 10 N + T = 40 N

T = 30 N

Abajo: T – 10 N = 40 N

T = 50 N

Movimiento en círculo vertical



Fuerza resultante hacia el centro $F_c = \frac{mv^2}{R}$

Considere ARRIBA del círculo:

$$mg + T = \frac{mv^2}{R}$$

$$T = \frac{mv^2}{R} - mg$$

Círculo vertical; Masa hacia abajo

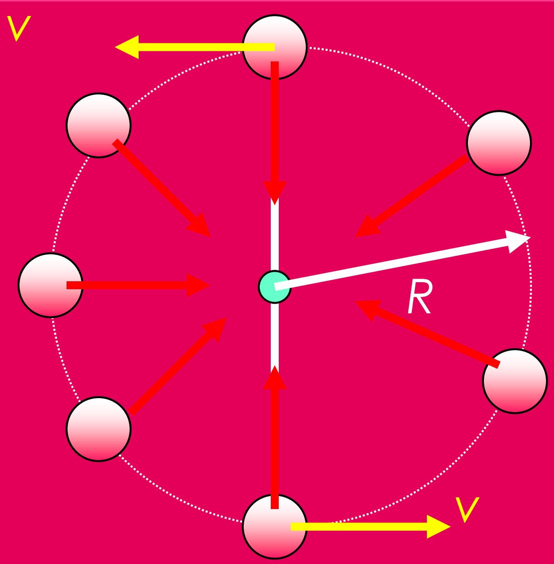
Fuerza resultante hacia el centro $F_c = \frac{mv^2}{R}$

Considere ABAJO del círculo:

$$T - mg = \frac{mv^2}{R}$$

$$T = \frac{mv^2}{R} + mg$$

Ayuda visual: Suponga que la fuerza centrípeta para mantener el movimiento circular es de 20 N. Con un peso de 5 N.



F_C = 20 N arriba
Y abajo.

$$F_C = \frac{mv^2}{R} = 20\text{ N}$$

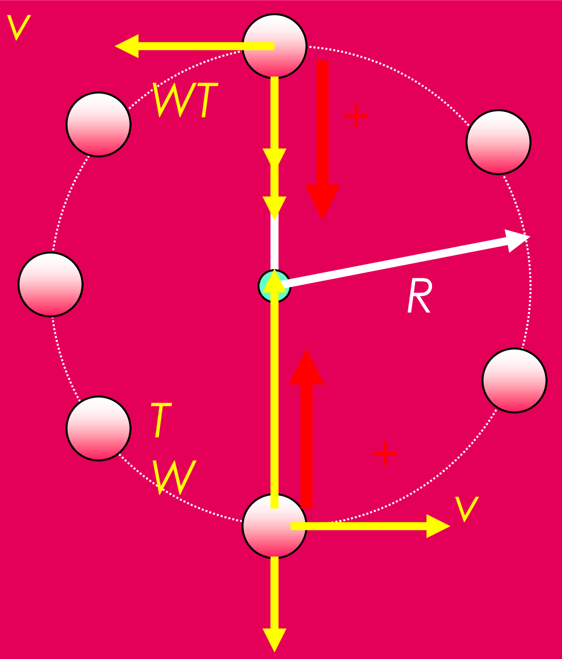
Fuerza central resultante F_C para todo punto de la trayectoria!

F_C = 20 N

El vector peso W desciende a cualquier punto.

W = 5 N, abajo

Ayuda visual: L fuerza resultante (20 N) es la suma del vector de *T* y *W* para todo punto de la trayectoria.



F_C = 20 N arriba Y abajo.

Arriba: $T + W = F_C$

T + 5 N = 20 N

T = 20 N - 5 N = 15 N

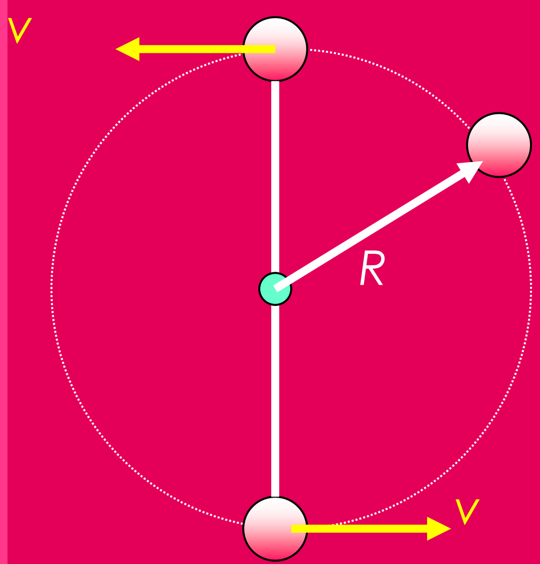
Abajo:

$T - W = F_C$

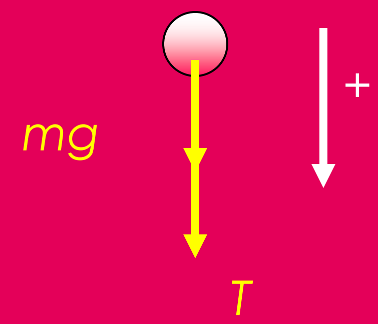
T - 5 N = 20 N

T = 20 N + 5 N = 25 N

Movimiento en círculo

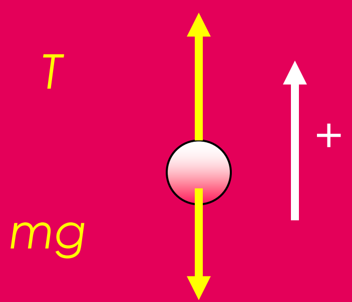


Hacia arriba:



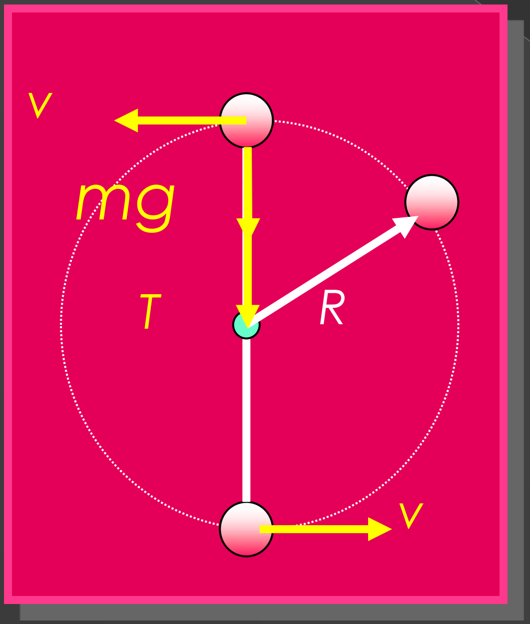
$$T = \frac{mv^2}{R} - mg$$

Hacia abajo:



$$T = \frac{mv^2}{R} + mg$$

Ejemplo 10: Una piedra de 2-kg gira en un círculo vertical de 8 m de radio. La velocidad de la piedra en el punto más alto es de 10 m/s. ¿Cuál es la tensión *T* en la cuerda?



Más alto: $mg + T = \frac{mv^2}{R}$

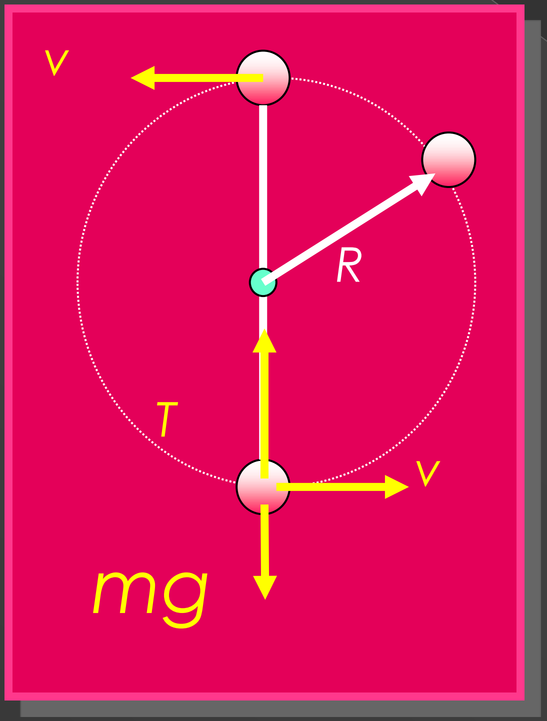
$T = \frac{mv^2}{R} - mg$

$$T = \frac{(2\,\text{kg})(10\,\text{m/s})^2}{8\text{ m}} + 2\text{ kg}(9.8\text{ m/s}^2)$$

T = 25 N - 19.6 N

T = 5.40 N

Ejemplo 11: Una piedra de 2-kg gira en un círculo vertical de 8 m de radio. La velocidad de la piedra en el punto más bajo es de 10 m/s. ¿Cuál es la tensión *T* en la cuerda?



Más bajo:

$$T - mg = \frac{mv^2}{R}$$

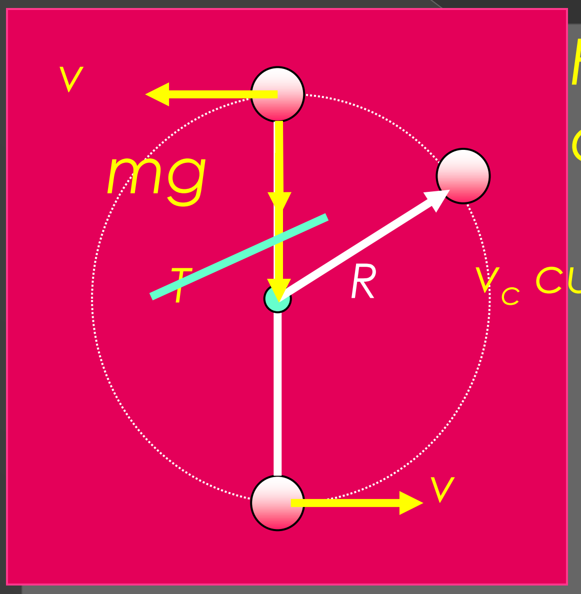
$$T = \frac{mv^2}{R} + mg$$

$$T = \frac{(2\,\text{kg})(10\,\text{m/s})^2}{8\,\text{m}} + 2\,\text{kg}(9.8\,\text{m/s}^2)$$

$T = 25\text{ N} + 19.6\text{ N}$

$T = 44.6\text{ N}$

Ejemplo 12: ¿Cuál es la velocidad crítica v_C hacia arriba, si la masa de 2-kg continúa en un círculo de radio de 8 m?



Hacia arriba:

$$mg + \cancel{T}^{\,0} = \frac{mv^2}{R}$$

v_C cuando $T = 0$

$$\cancel{m}g = \frac{\cancel{m}v^2}{R}$$

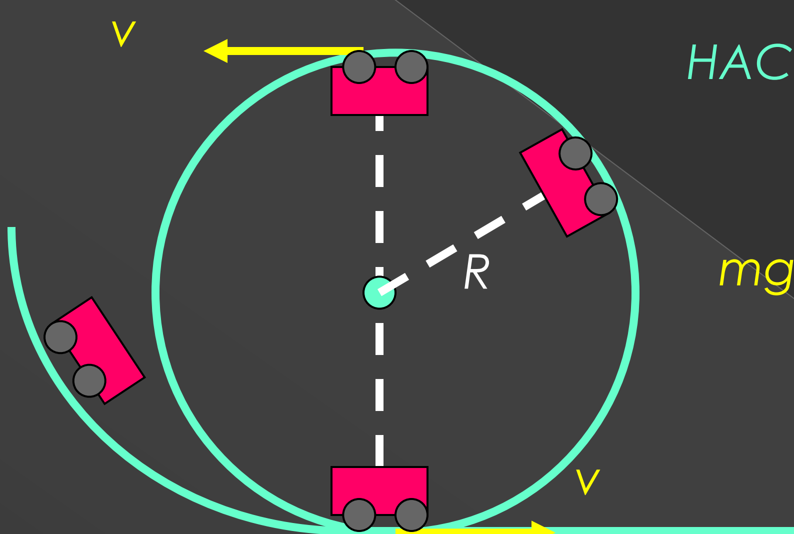
$$v_C = \sqrt{gR}$$

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{(9.8\ \text{m/s}^2)(8\ \text{m})}$$

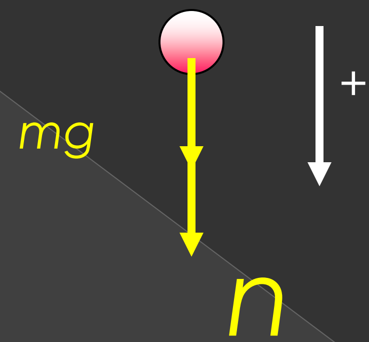
$$v_C = 8.85\ \text{m/s}$$

Dar vueltas

Misma cuerda, n reemplaza a T

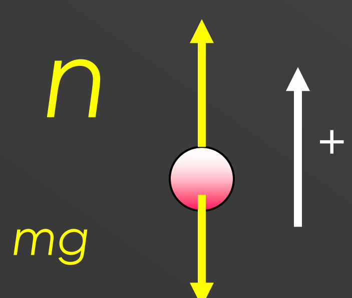


HACIA ARRIBA:



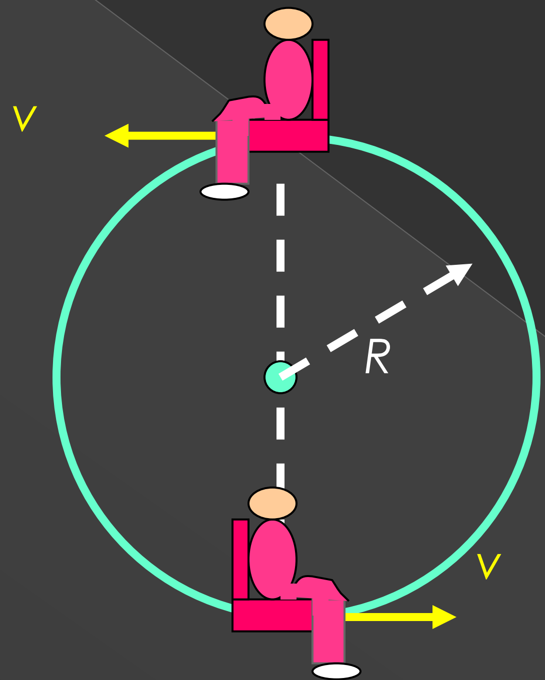
$$n = \frac{mv^2}{R} - mg$$

HACIA ABAJO:

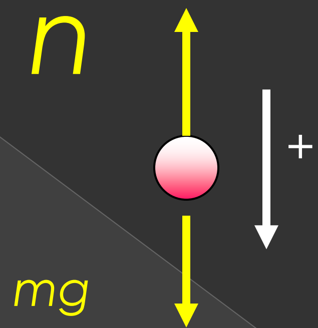


$$n = \frac{mv^2}{R} + mg$$

Sillas giratorias



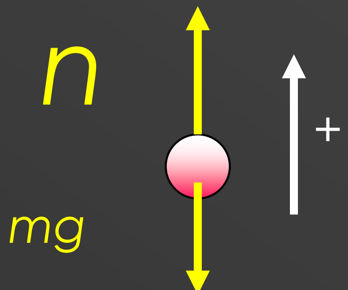
Hacia arriba:



$$mg - n = \frac{mv^2}{R}$$

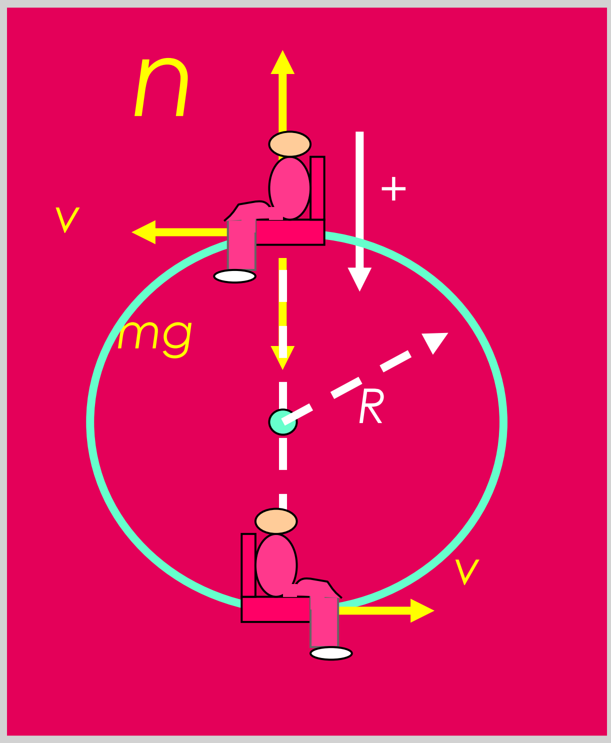
$$\boxed{n = mg - \frac{mv^2}{R}}$$

Hacia abajo



$$\boxed{n = \frac{mv^2}{R} + mg}$$

Ejemplo 13: ¿Cuál es el peso aparente de una persona de 60-kg al pasar por el punto más alto cuando $R = 45$ m y la velocidad en ese punto es de 6 m/s?



El peso aparente será la fuerza normal hacia arriba:

$$mg - n = \frac{mv^2}{R} \qquad n = mg - \frac{mv^2}{R}$$

$$n = 60\ \text{kg}(9.8\ \text{m/s}^2) - \frac{(60\ \text{kg})(6\ \text{m/s})^2}{45\ \text{m}}$$

$$n = 540\ \text{N}$$

RESUMEN

Aceleración centrípeta:

$$a_c = \frac{v^2}{R}; \quad F_c = ma_c = \frac{mv^2}{R}$$

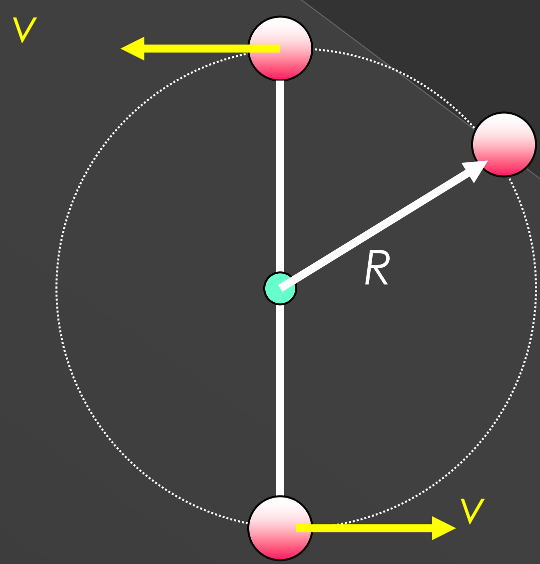
$$v = \sqrt{\mu_s g R}$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$$

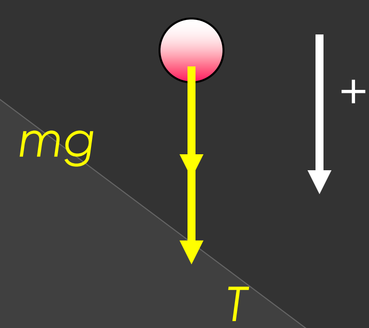
Péndulo cónico:

$$v = \sqrt{gR\tan\theta}$$

Resumen: movimiento en círculo

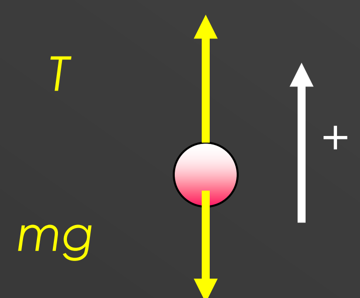


HACIA ARRIBA:



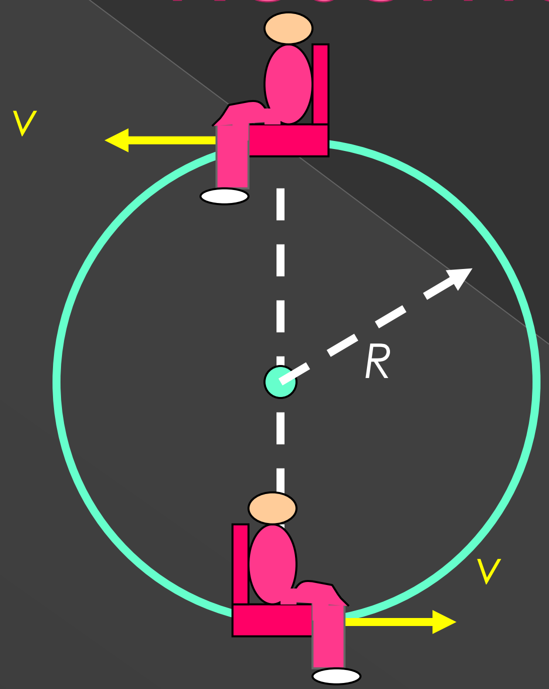
$$T = \frac{mv^2}{R} - mg$$

HACI ABAJO:



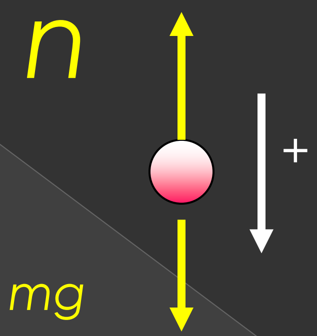
$$T = \frac{mv^2}{R} + mg$$

Resumen: Sillas giratorias



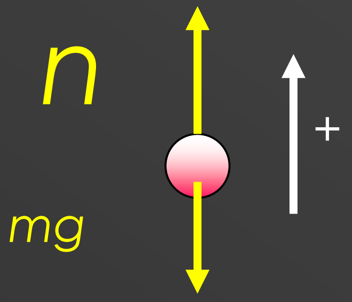
HACIA ARRIBA:

$$mg - n = \frac{mv^2}{R}$$



$$\boxed{n = mg - \frac{mv^2}{R}}$$

HACIA ABAJO:



$$\boxed{n = \frac{mv^2}{R} + mg}$$

CONCLUSIÓN: