



- Rotación de cuerpo rígido

JRW

© 2012





Repaso

JRW

© 2012

Angular Velocity	$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$
Average Angular Acceleration	$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
Angular Frequency	$f = \frac{\omega}{2\pi}$
Angular Period	$T = \frac{1}{f}$
Relations between Linear and Angular Variables	$s = \theta r$ $v = \omega r$ $a = \alpha r$
Equations for Rotational and Angular Kinematics with Constant Acceleration	$\phi = \phi_0 + \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t$ $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\phi = \phi_0 + \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\phi - \phi_0)$

Trigonometric Function	$\tau = Fr \sin \theta$
Component Form of the Torque Equation	$\tau = F_{\perp} r = Fr_{\perp}$
Torque As Cross Product	$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
Newton's Second Law in Terms of Rotational Motion	$\tau_{\text{net}} = I\alpha$
Moment of Inertia	$I = \Sigma mr^2$
Kinetic Energy of Rotation	$KE = \frac{1}{2}I\omega^2$
Angular Momentum of a Particle	$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
Component Form of the Angular Momentum of	$L = mrv_{\perp}$ $L = mr_{\perp}v$

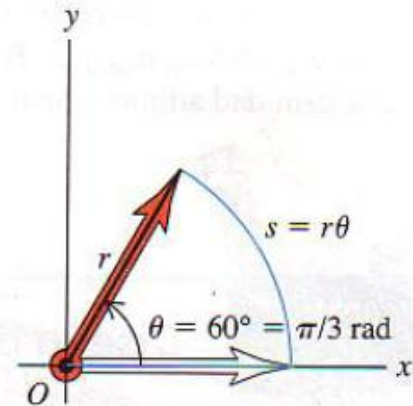
$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (9.15)$$

(aceleración centrípeta de un punto de un cuerpo en rotación)

Esto se cumple en todo instante *aun si ω y v no son constantes*. La componente centrípeta siempre apunta hacia el eje de rotación.

La suma vectorial de las componentes centrípeta y tangencial de la aceleración de una partícula en un cuerpo en rotación es la aceleración lineal \vec{a} (Fig. 9.11).

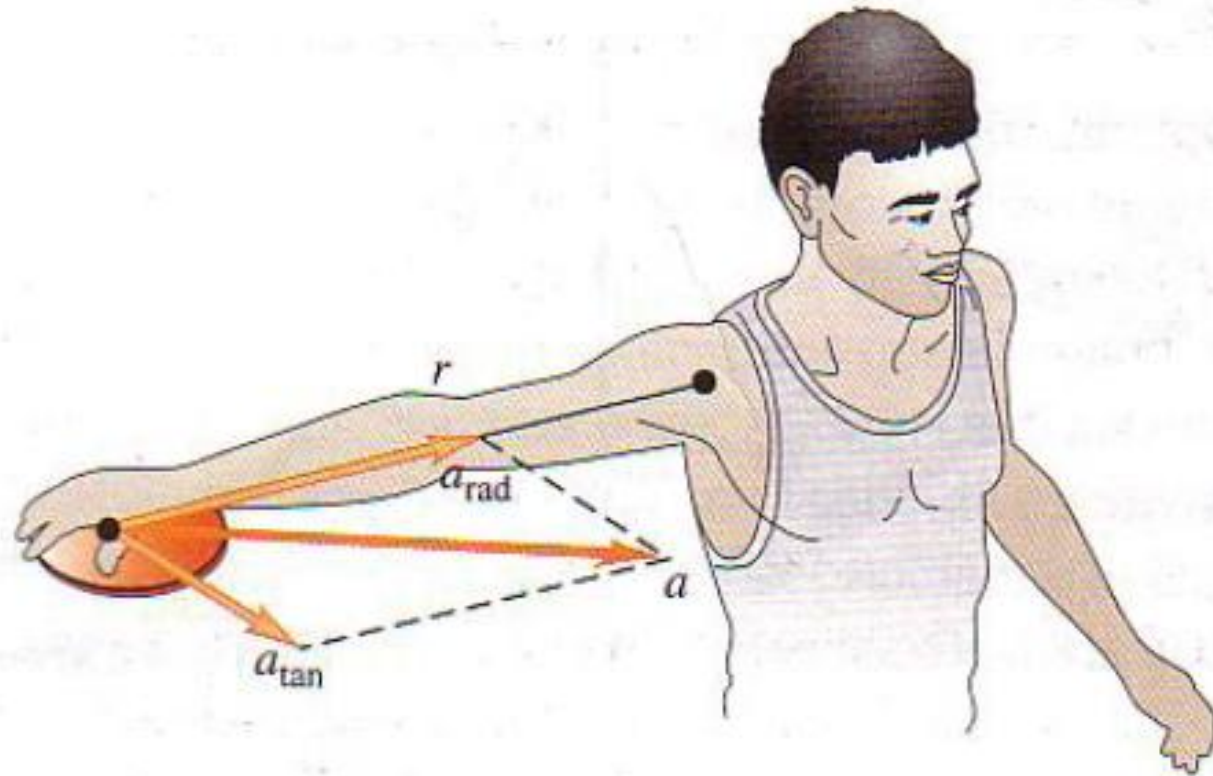
CUIDADO Es importante recordar que la ecuación (9.1), $s = r\theta$, es válida sólo si θ se mide en radianes. Lo mismo sucede con todas las ecuaciones derivadas de ella, incluidas las ecuaciones (9.13), (9.14) y (9.15). Al usar estas ecuaciones, *debemos* expresar los ángulos en radianes, no revoluciones ni grados (Fig. 9.12).



INCORRECTO ~~$s = 60r$~~

CORRECTO $s = (\pi/3)r$

Un lanzador de disco gira el disco en un círculo con radio de 80.0 cm. En cierto instante, el lanzador gira con rapidez angular de 10.0 rad/s y la rapidez angular está aumentando a razón de 50 rad/s². Calcule las componentes de aceleración tangencial y centrípeta del disco en ese instante y la magnitud de esa aceleración.



EJECUTAR: De las ecuaciones (9.14) y (9.15):

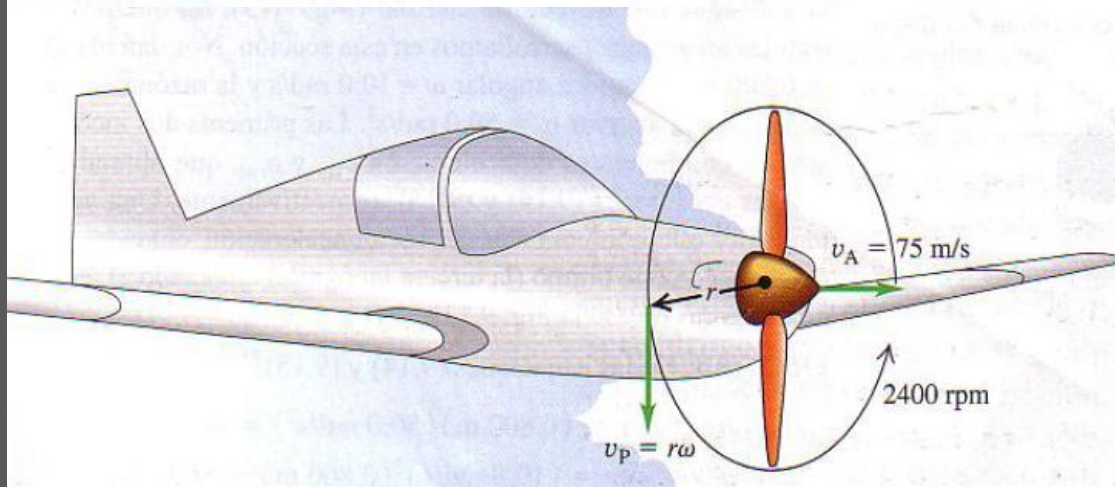
$$a_{\text{tan}} = r\alpha = (0.800 \text{ m})(50.0 \text{ rad/s}^2) = 40.0 \text{ m/s}^2$$

$$a_{\text{rad}} = \omega^2 r = (10.0 \text{ rad/s})^2(0.800 \text{ m}) = 80.0 \text{ m/s}^2$$

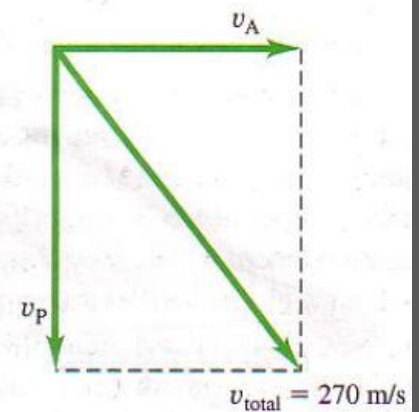
La magnitud del vector aceleración es

$$a = \sqrt{a_{\text{tan}}^2 + a_{\text{rad}}^2} = 89.4 \text{ m/s}^2$$

Imagine que le piden diseñar una hélice de avión que gire a 2400 rpm. La rapidez de avance del avión en el aire debe ser de 75.0 m/s (270 km/h), y la rapidez de las puntas de las paletas de la hélice en el aire no debe exceder 270 m/s (Fig. 9.14a). (Esto es cerca de 0.80 veces la rapidez del sonido en aire. Si las puntas se movieran con la rapidez del sonido, producirían un ruido tremendo. Al mantener esta rapidez en un nivel suficientemente menor, el ruido se hace aceptable.) a) ¿Qué radio máximo puede tener la hélice? b) Con este radio, qué aceleración tiene la punta de la hélice?



(a)



(b)

$$\begin{aligned}\omega &= 2400 \text{ rpm} = \left(2400 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right) \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) \\ &= 251 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

a) Según la figura 9.14b y la ecuación (9.13), la magnitud de la velocidad v_{total} está dada por

$$v_{\text{total}}^2 = v_A^2 + v_P^2 = v_A^2 + r^2\omega^2$$

así que

$$r^2 = \frac{v_{\text{total}}^2 - v_A^2}{\omega^2} \quad \text{y} \quad r = \frac{\sqrt{v_{\text{total}}^2 - v_A^2}}{\omega}$$

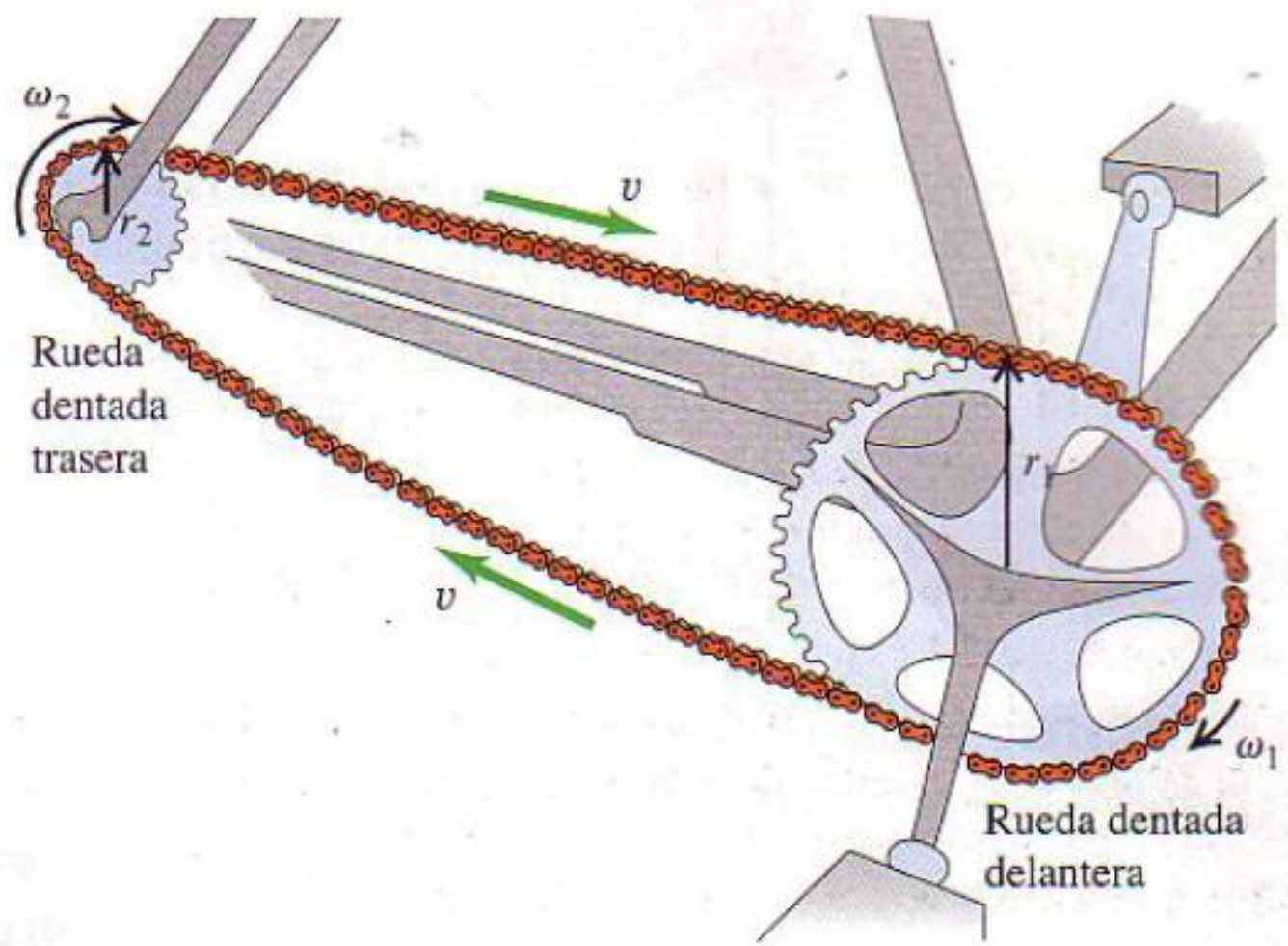
Si $v_{\text{total}} = 270 \text{ m/s}$, el radio de la hélice es

$$r = \frac{\sqrt{(270 \text{ m/s})^2 - (75.0 \text{ m/s})^2}}{251 \text{ rad/s}} = 1.03 \text{ m}$$

b) La aceleración puramente centrípeta es

$$\begin{aligned}a_{\text{rad}} &= \omega^2 r \\ &= (251 \text{ rad/s})^2 (1.03 \text{ m}) = 6.5 \times 10^4 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

¿Qué relación hay entre las velocidades angulares de las ruedas dentadas de bicicleta de la Fig. 9.15 y el número de dientes de cada rueda?



La cadena no resbala ni se estira, así que se mueve con la misma velocidad tangencial v en ambas ruedas. Por la ecuación (9.13),

$$v = r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \quad \text{así que} \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

La rapidez angular es inversamente proporcional al radio. Esto se cumple también para poleas conectadas con una correa, siempre que ésta no resbale. En el caso de las ruedas dentadas, los dientes deben estar equiespaciados en sus circunferencias para que la cadena embone correctamente. Sean N_1 y N_2 los números de dientes; la condición de que el espaciado de los dientes sea igual en ambas ruedas es

$$\frac{2\pi r_1}{N_1} = \frac{2\pi r_2}{N_2} \quad \text{o sea} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Combinando esto con la otra ecuación, tenemos

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$K = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + \dots = \sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$$

Sacando el factor común $\omega^2/2$ de esta expresión, tenemos

$$K = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

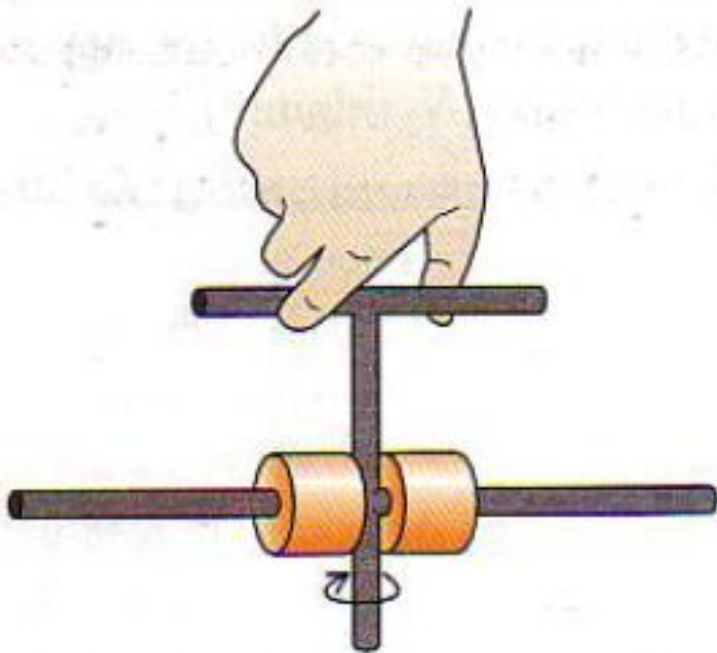
La cantidad en paréntesis, que se obtiene multiplicando la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia al eje de rotación y sumando los productos, se denota con I y es el **momento de inercia** del cuerpo para este eje de rotación:

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots = \sum_i m_i r_i^2 \quad (9.16)$$

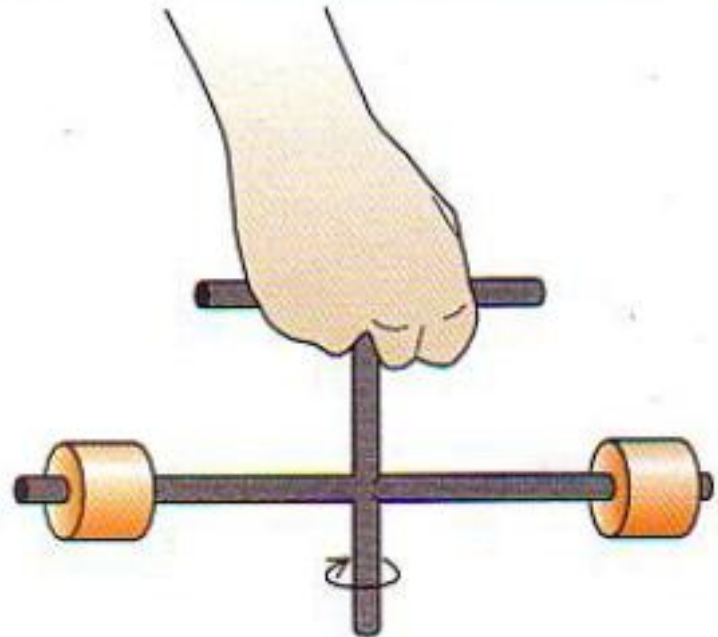
(definición de momento de inercia)

La palabra “momento” implica que I depende de la distribución espacial de la masa del cuerpo; nada tiene que ver con el tiempo. Para un cuerpo con un eje de rotación dado y una masa total dada, cuanto mayor sea la distancia del eje a las partículas que constituyen el cuerpo, mayor será el momento de inercia. En un

- Masa cercana al eje
- Momento de inercia pequeño
- Es fácil poner a girar el aparato



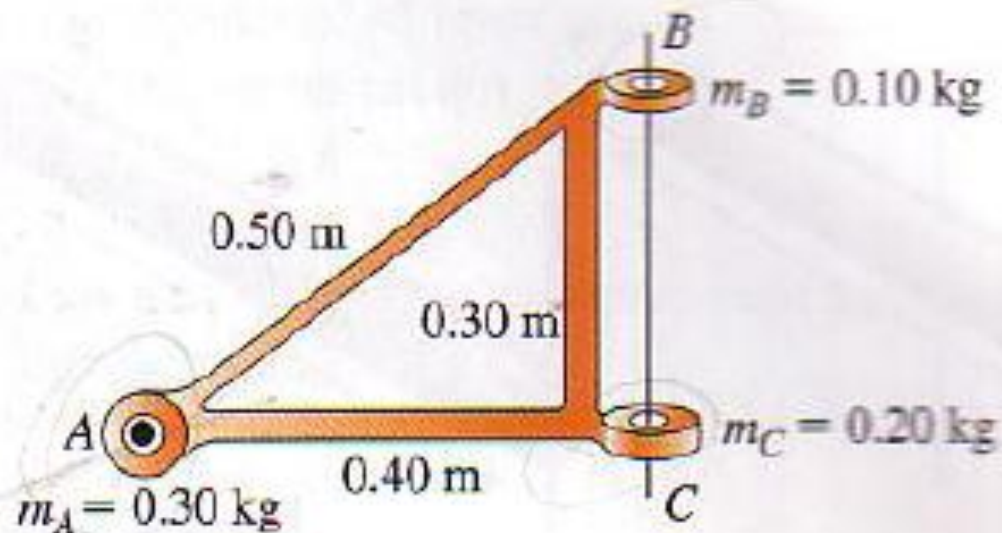
- Masa más lejos del eje
- Mayor momento de inercia
- Es más difícil poner a girar el aparato



$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (\text{energía cinética rotacional de un cuerpo rígido}) \quad (9.17)$$

La energía cinética dada por la ecuación (9.17) no es una nueva forma de energía; es la suma de las energías cinéticas de las partículas que constituyen el cuerpo rígido, escritas en una forma compacta y conveniente en términos del momento de inercia. Al usar la ecuación (9.17), ω debe medirse en radianes por segundo, no revoluciones ni grados por segundo, a fin de dar K en joules; la razón es que usamos $v_i = r_i\omega$ en la deducción.

Un ingeniero está diseñando una pieza mecánica formada por tres conectores gruesos unidos por puntales ligeros moldeados (Fig. 9.17). a) ¿Qué momento de inercia tiene este cuerpo alrededor de un eje que pasa por el punto A y es perpendicular al plano del diagrama? b) ¿Y alrededor de un eje coincidente con la varilla BC ? c) Si el cuerpo gira sobre el eje que pasa por A y es perpendicular al plano del diagrama, con rapidez angular $\omega = 4.0 \text{ rad/s}$, ¿qué energía cinética tiene?



EJECUTAR: a) la partícula en el punto A está *sobre* el eje; su distancia r respecto al eje es 0, así que no contribuye al momento de inercia. La ecuación (9.16) da

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i r_i^2 = (0.10 \text{ kg})(0.50 \text{ m})^2 + (0.20 \text{ kg})(0.40 \text{ m})^2 \\ &= 0.057 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

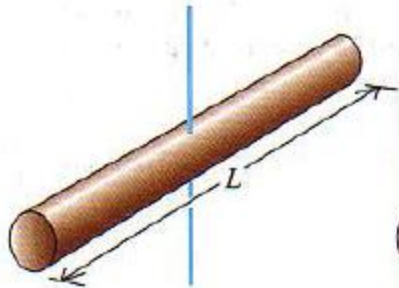
b) Las partículas en B y C están *sobre* el eje, así que, para ellas, $r = 0$, y ninguna contribuye al momento de inercia. Sólo A contribuye, y tenemos

$$I = \sum m_i r_i^2 = (0.30 \text{ kg})(0.40 \text{ m})^2 = 0.048 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

c) Por la ecuación (9.17),

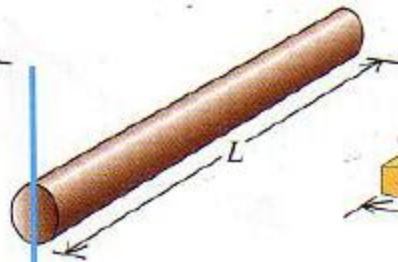
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (0.057 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) (4.0 \text{ rad/s})^2 = 0.46 \text{ J}$$

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



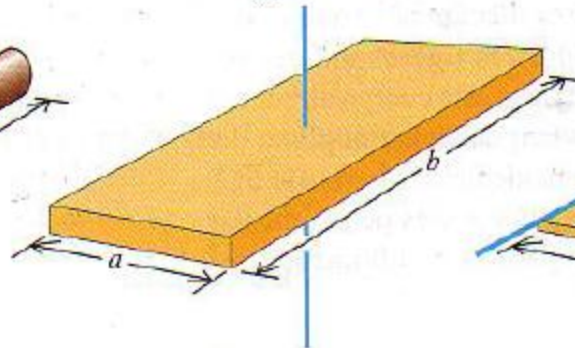
(a) Varilla delgada, eje por el centro

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



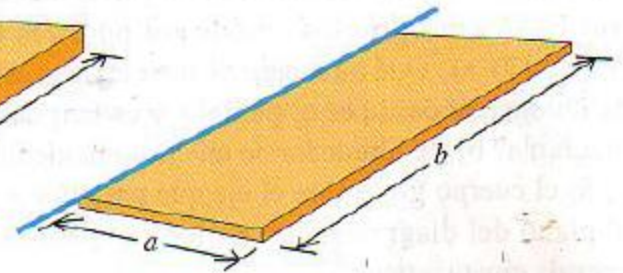
(b) Varilla delgada, eje por un extremo

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



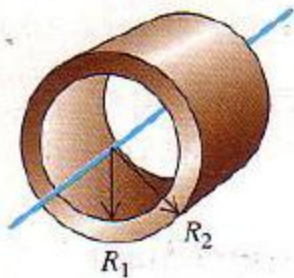
(c) Placa rectangular, eje por el centro

$$I = \frac{1}{3} Ma^2$$



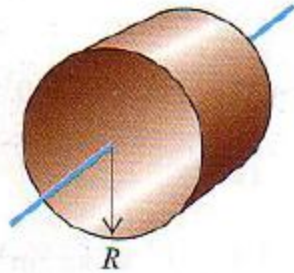
(d) Placa rectangular delgada, eje en un borde

$$I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$



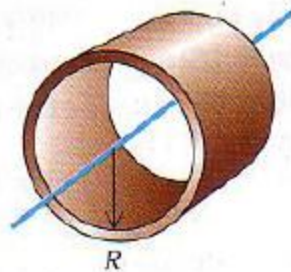
(e) Cilindro hueco

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



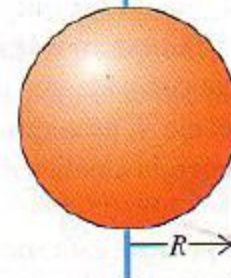
(f) Cilindro relleno

$$I = MR^2$$



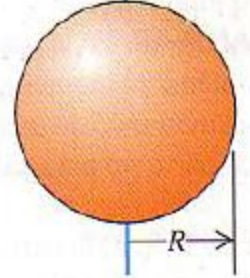
(g) Cilindro hueco de pared delgada

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$



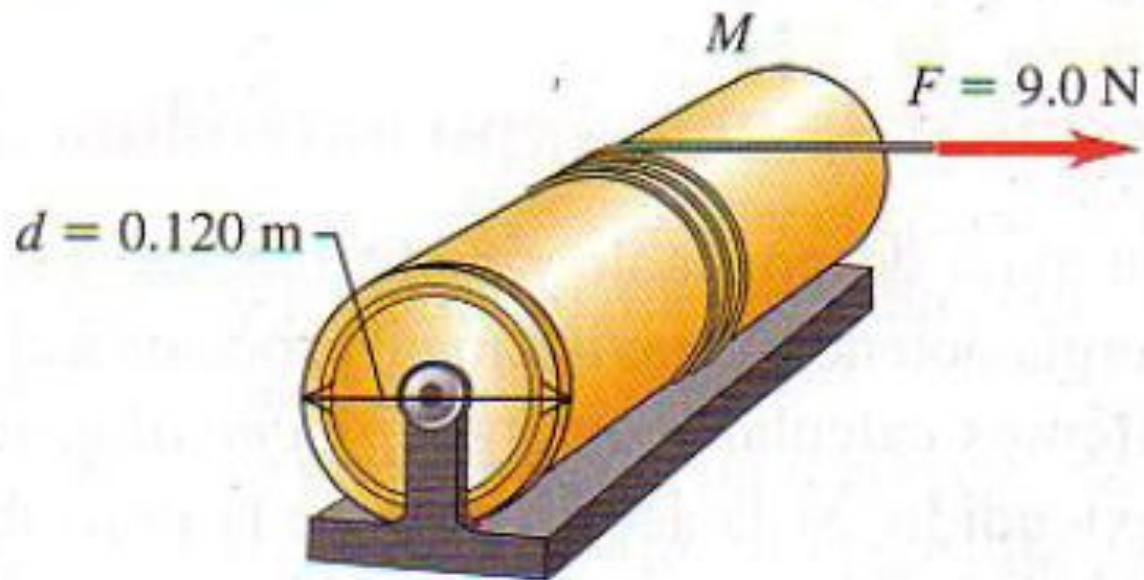
(h) Esfera rellena

$$I = \frac{2}{3} MR^2$$



(i) Esfera hueca de pared delgada

Un cable ligero, flexible y que no se estira está enrollado varias vueltas en el tambor de un malacate, un cilindro sólido de 50 kg y 0.120 m de diámetro, que gira sobre un eje fijo horizontal montado en cojinetes sin fricción (Fig. 9.18). Una fuerza constante de magnitud de 9.0 N tira del extremo libre del cable a lo largo de una distancia de 2.0 m. El cable no resbala, y hace girar al cilindro al desenrollarse. Si el cilindro estaba inicialmente en reposo, calcule su rapidez angular final y la rapidez final del cable.



EJECUTAR: El trabajo efectuado sobre el cilindro es $W_{\text{otras}} = Fs = (9.0 \text{ N})(2.0 \text{ m}) = 18 \text{ J}$. Según la tabla 9.2, el momento de inercia es

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}(50 \text{ kg})(0.060 \text{ m})^2 = 0.090 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

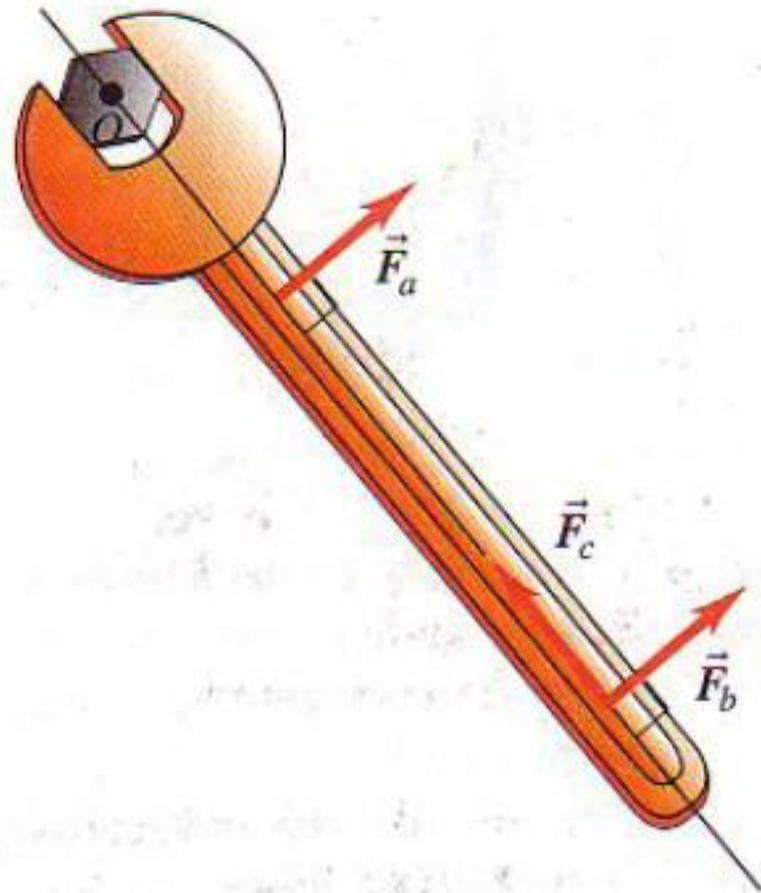
(El radio R es la mitad del diámetro del cilindro.) La relación $K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} = K_2 + U_2$ da

$$0 + 0 + W_{\text{otras}} = \frac{1}{2}I\omega^2 + 0$$

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{2W_{\text{otras}}}{I}} = \sqrt{\frac{2(18 \text{ J})}{0.090 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}} \\ &= 20 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

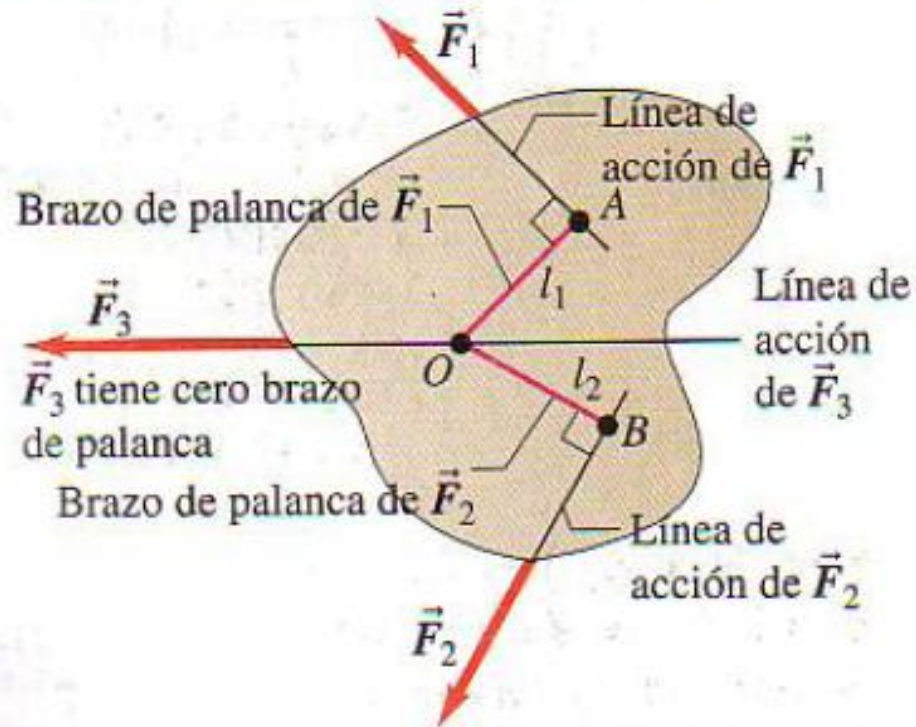
La rapidez tangencial final del cilindro, y por ende, la rapidez final del cable es

$$v = R\omega = (0.060 \text{ m})(20 \text{ rad/s}) = 1.2 \text{ m/s}$$

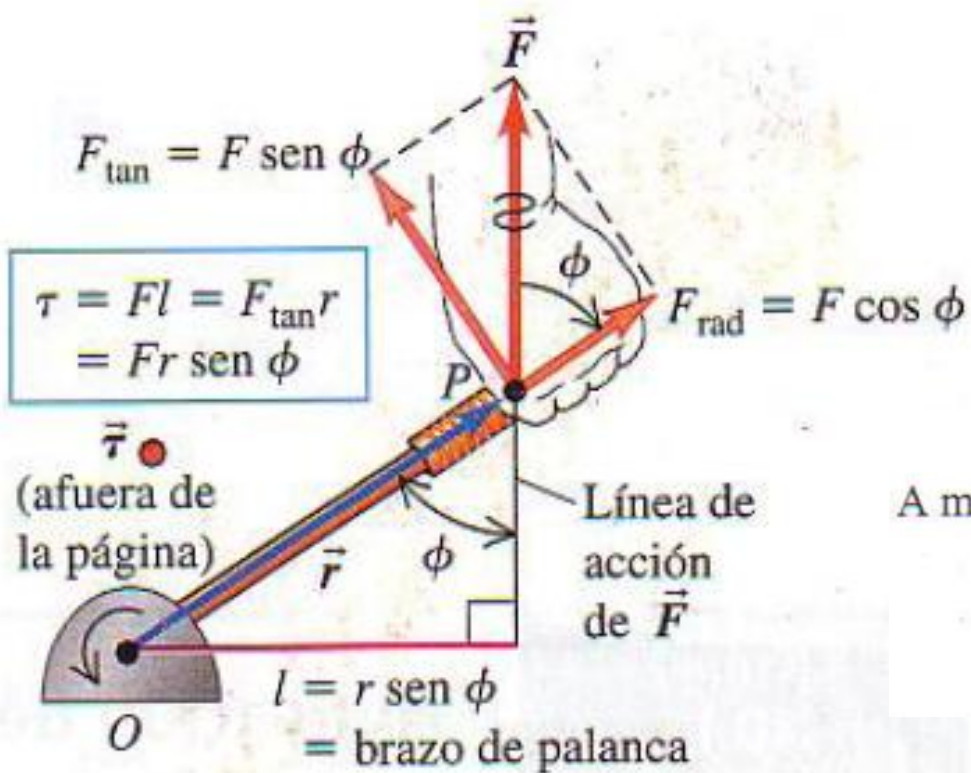


10.1 ¿Cuál de estas tres fuerzas de igual magnitud tiene mayor probabilidad de aflojar el perno apretado?

Momento de torsión =
(magnitud de fuerza) \times (brazo de palanca)



10.2 El momento de torsión de una fuerza alrededor de un punto es el producto de la magnitud de la fuerza y el brazo de palanca.



$$\tau_1 = +F_1 l_1 \quad \tau_2 = -F_2 l_2$$

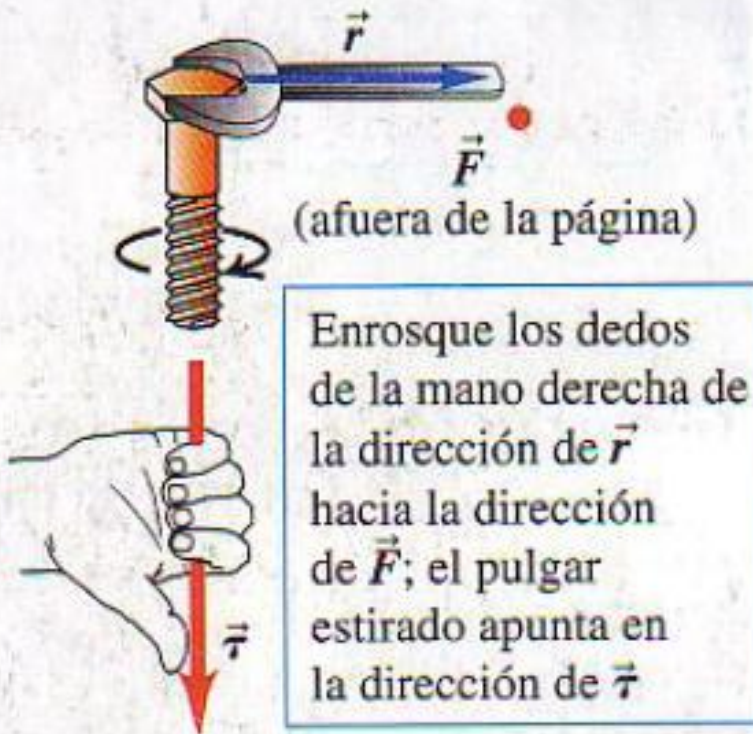
A menudo usaremos el símbolo



10.3 El momento de torsión de la fuerza \vec{F} en torno al punto O se define como $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. La magnitud de $\vec{\tau}$ es $rF \text{ sen } \phi$. Aquí, \vec{r} y \vec{F} están en el plano del papel; por la regla de la mano derecha del producto vectorial, $\vec{\tau}$ apunta afuera de la página hacia el lector.

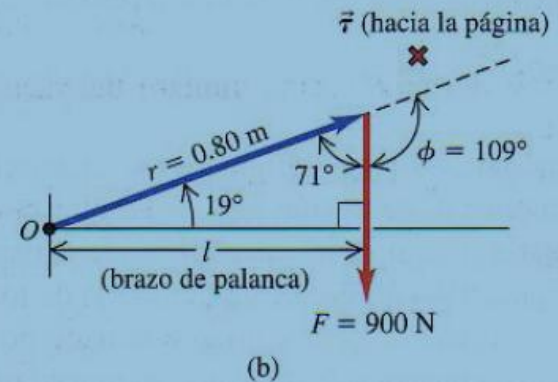
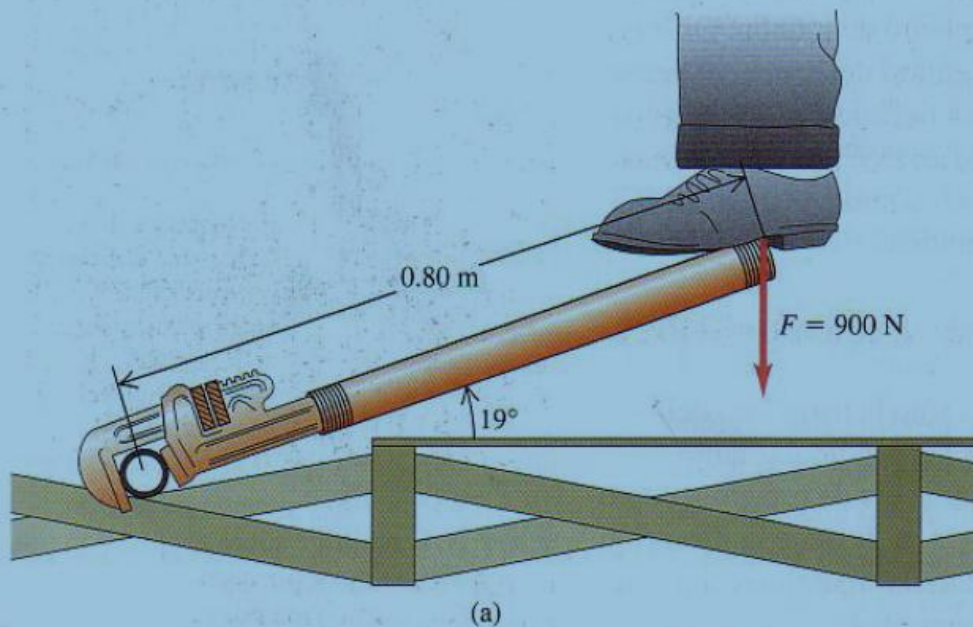
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

(definición del vector de momento de torsión)



10.4 El vector de momento de torsión, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ se dirige sobre el eje del perno, perpendicular tanto a \vec{r} como a \vec{F} . La dirección de $\vec{\tau}$ está dada por la regla de la mano derecha. Vemos que los dedos de la mano derecha se curvan en la dirección de la rotación que el momento tiende a causar.

Un plomero aficionado que no puede aflojar una junta ensarta un tramo de tubo en el mango de su llave de tuercas y aplica todo su peso de 900 N al extremo del tubo parándose en él. La distancia del centro de la junta al punto donde actúa el peso es de 0.80 m, y el mango y el tubo forman un ángulo de 19° con la horizontal (Fig. 10.5a). Calcule la magnitud y dirección del momento de torsión que el plomero aplica en torno al centro de la junta.



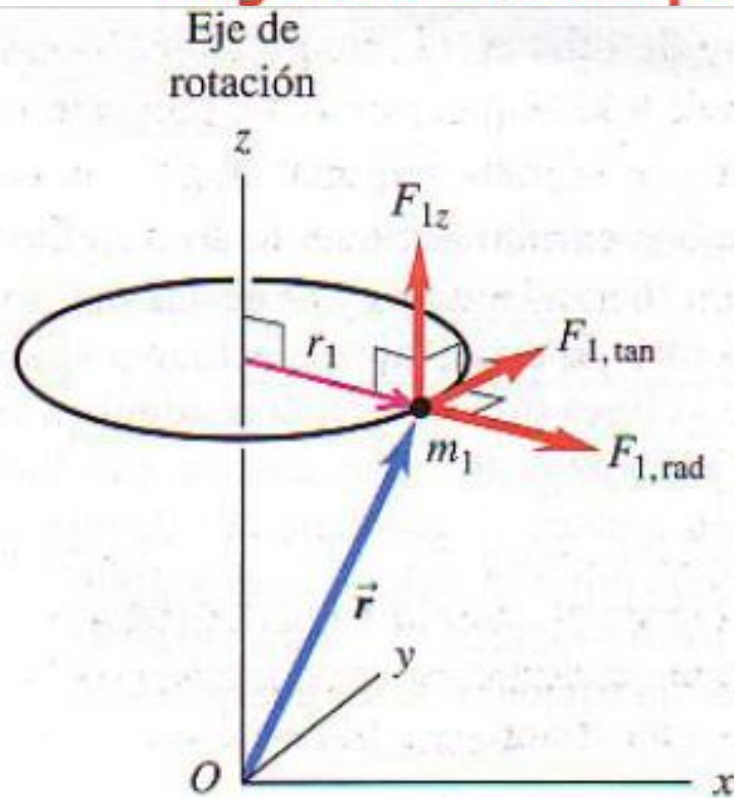
10.5 (a) Un plomero aficionado trata de aflojar una junta parándose en una extensión del mango de la llave de tuercas. (b) Diagrama vectorial para calcular el momento de torsión respecto a O .

$$l = (0.80 \text{ m}) \sin 109^\circ = (0.80 \text{ m}) \sin 71^\circ = 0.76 \text{ m}$$

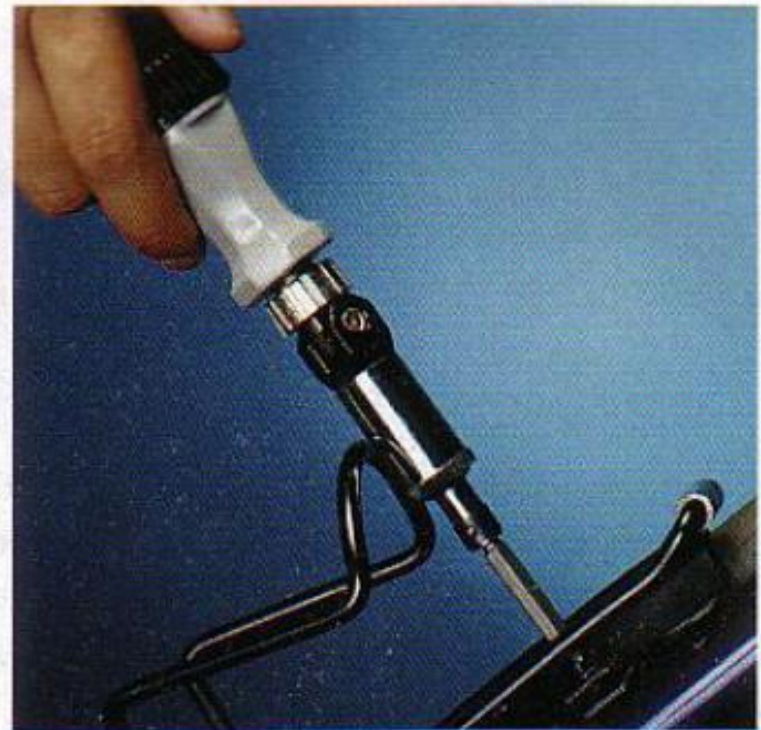
La ecuación (10.1) nos dice que la magnitud del momento de torsión es

$$\tau = Fl = (900 \text{ N})(0.76 \text{ m}) = 680 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Momento de torsión y aceleración angular de un cuerpo rígido



10.6 Tres componentes de la fuerza neta actúan sobre una de las partículas de un cuerpo rígido. Sólo $F_{1,tan}$ tiene una componente z de momento de torsión alrededor de O.



10.7 Para aflojar o apretar un tornillo, es preciso impartirle una aceleración angular y, por tanto, aplicar un momento de torsión. Esto se facilita si se usa un destornillador con mango de radio grande, pues así se aumenta el brazo de palanca de la fuerza que aplicamos con la mano.

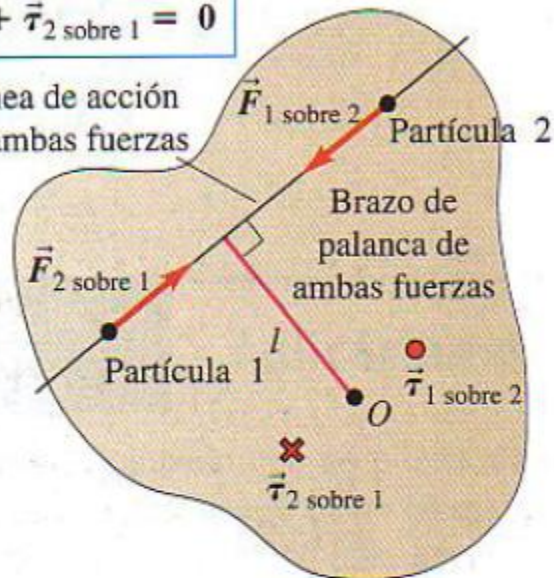
$$\sum \tau_z = I\alpha_z \quad (10.6)$$

(análogo rotacional de la segunda ley de Newton para un cuerpo rígido)

Los momentos de torsión debidos a fuerzas internas se cancelan:

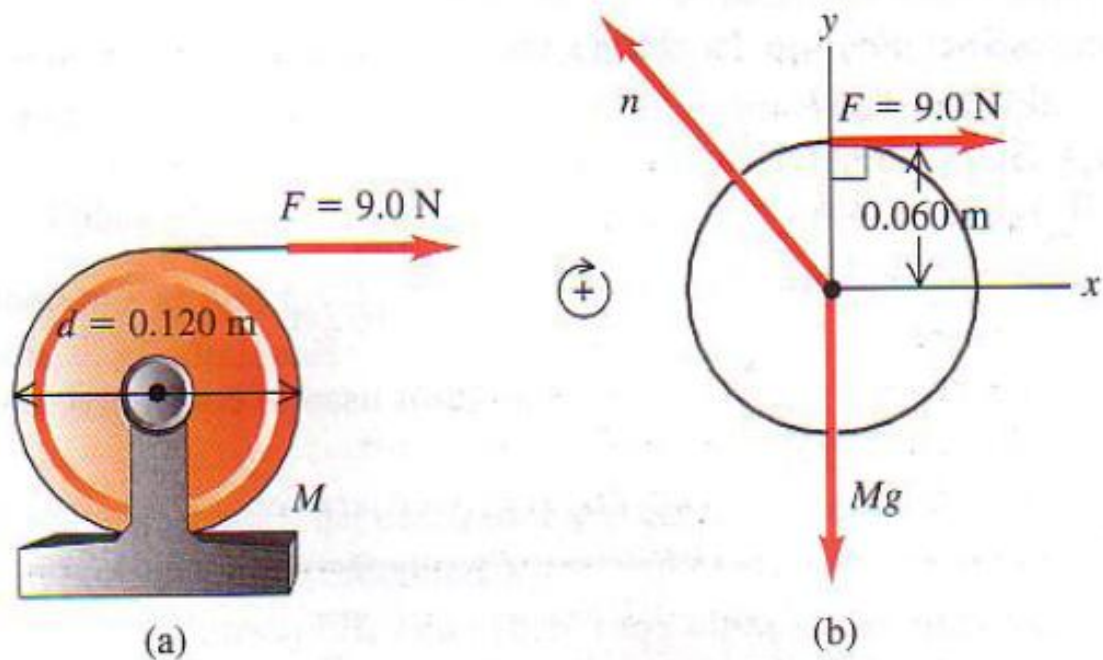
$$\vec{\tau}_{1 \text{ sobre } 2} + \vec{\tau}_{2 \text{ sobre } 1} = \mathbf{0}$$

Línea de acción de ambas fuerzas



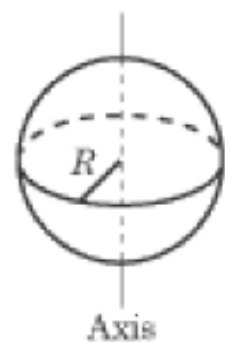
10.8 Dos partículas de un cuerpo rígido ejercen fuerzas iguales y opuestas una sobre la otra. Si estas fuerzas actúan a lo largo de la línea que va de una partícula a la otra, los brazos de palanca de las dos fuerzas son iguales y los momentos de torsión causados por ellas son iguales y opuestos. Sólo los momentos de torsión *externos* afectan la rotación de un cuerpo rígido.

La figura 10.9a muestra la situación que analizamos en el ejemplo 9.8 (sección 9.4) usando métodos de energía. Se enrolla un cable varias veces en un cilindro sólido uniforme de 50 kg con diámetro de 0.120 m, que puede girar sobre su eje. Se tira del cable con una fuerza de 9.0 N. Suponiendo que el cable se desenrolla sin estirarse ni resbalar, ¿qué aceleración tiene?



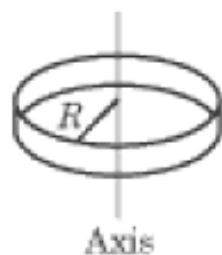
10.9 (a) Cilindro y cable. (b) Diagrama de cuerpo libre para el cilindro.

uniform sphere



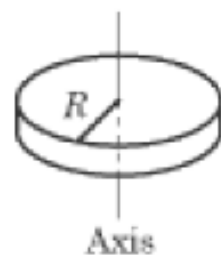
$$\frac{2}{5} MR^2$$

uniform ring



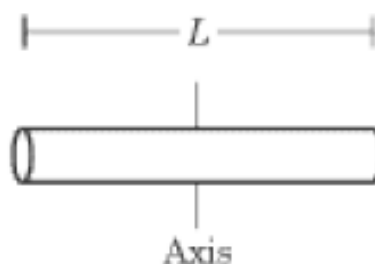
$$MR^2$$

uniform disk

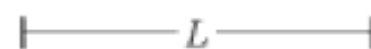


$$\frac{1}{2} MR^2$$

uniform rod



$$\frac{1}{12} ML^2$$



$$\frac{1}{3} ML^2$$

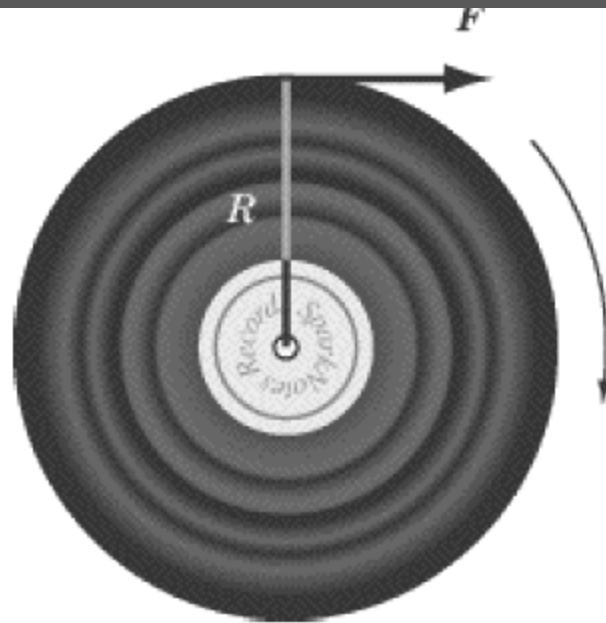
EJECUTAR: El único momento de torsión alrededor del eje de rotación se debe a la fuerza F , cuyo brazo de palanca es igual al radio R del cilindro: $l = R = 0.060$ m, así que $\tau_z = FR$. (Éste momento de torsión es positivo porque tiende a producir una rotación horaria.) Por el ejemplo 9.8, el momento de inercia del cilindro en torno al eje de rotación es $I = \frac{1}{2}MR^2$. Por tanto, la ecuación (10.6) nos da la aceleración *angular* del cilindro:

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = \frac{FR}{MR^2/2} = \frac{2F}{MR} = \frac{2(9.0 \text{ N})}{(50 \text{ kg})(0.060 \text{ m})} = 6.0 \text{ rad/s}^2$$

(Verifique que éstas unidades sean correctas. Podemos añadir “rad” a nuestro resultado porque el radián es una cantidad adimensional.)

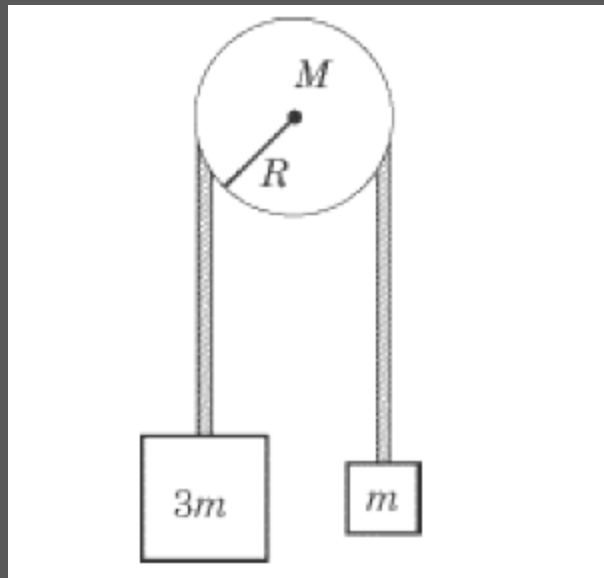
Para obtener la aceleración *lineal* del cable, necesitamos una relación cinemática. En la sección 9.3 señalamos que la aceleración de un cable que se desenrolla de un cilindro es igual a la componente tangencial de aceleración de un punto en la superficie del cilindro donde el cable es tangente a él. Dicha aceleración tangencial está dada por la ecuación (9.14):

$$a_x = R\alpha = (0.060 \text{ m})(6.0 \text{ rad/s}^2) = 0.36 \text{ m/s}^2$$



A record of mass M and radius R is free to rotate around an axis through its center, O . A tangential force F is applied to the record. What must one do to maximize the angular acceleration?

- (A) Make F and M as large as possible and R as small as possible
- (B) Make M as large as possible and F and R as small as possible.
- (C) Make F as large as possible and M and R as small as possible.
- (D) Make R as large as possible and F and M as small as possible.
- (E) Make F , M , and R as large as possible.



sum of the torques is given by:

$$\Sigma \tau = T_1 R - T_2 R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha$$

Solve for the tensions using Newton's second law. For Mass 1:

$$\Sigma F = 3mg - T_1 = 3ma$$

For Mass 2:

$$\Sigma F = mg - T_2 = (-ma)$$

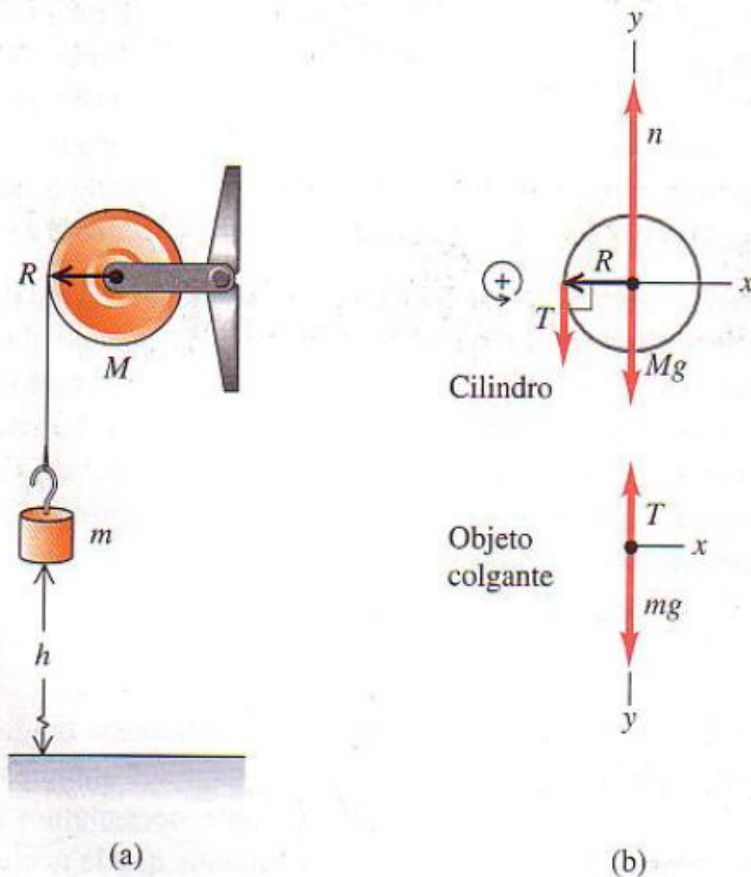
$a = R\alpha$. Substitute into the first equation:

$$3R(mg - mR\alpha) - R(mg + mR\alpha) = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

$$2mgR - 4m\alpha R^2 = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{2mg}{\frac{1}{2}MR + 4MR}$$

La figura 10.10a muestra la situación que analizamos en el ejemplo 9.9 (sección 9.4) usando métodos de energía. Calcule la aceleración del objeto de masa m .



10.10 (a) Cilindro, objeto y cable. (b) Diagramas de cuerpo libre para el cilindro y el objeto que cuelga. La masa del cable se supone despreciable.

$$\sum \tau_z = RT = I\alpha_z = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z$$

Al igual que en el ejemplo 10.2, la aceleración del cable es igual a la aceleración tangencial de un punto en el borde del cilindro, que, según la ecuación (9.14), es $a_y = a_{\text{tan}} = R\alpha_z$. Usamos esto para sustituir $(R\alpha_z)$ por a_y en la ecuación anterior y luego dividimos entre R ; el resultado es

$$T = \frac{1}{2}Ma_y$$

Ahora sustituimos ésta expresión para T en la segunda ley de Newton para el objeto y despejamos la aceleración a_y :

$$mg - \frac{1}{2}Ma_y = ma_y$$

$$a_y = \frac{g}{1 + M/2m}$$

$$T = mg - ma_y = mg - m\left(\frac{g}{1 + M/2m}\right) = \frac{mg}{1 + 2m/M}$$

La tensión en el cable *no* es igual al peso mg del objeto; si así fuera, el objeto no podría acelerar.

Revisemos algunos casos específicos. Si M es mucho mayor que m , la tensión es casi igual a mg , y por tanto la aceleración es mucho menor que g . Si $M = 0$, $T = 0$ y $a_y = g$; el objeto cae libremente. Si el objeto parte de una altura h sobre el piso con rapidez inicial v_0 , su rapidez v al golpear el piso está dada por $v^2 = v_0^2 + 2a_y h$. Si parte del reposo, $v_0 = 0$ y

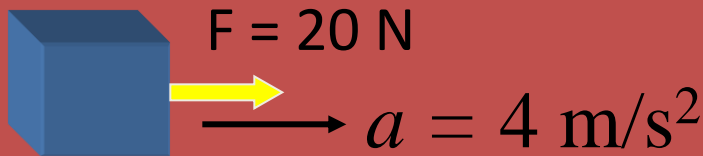
$$v = \sqrt{2a_y h} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

Objetivos: Después de completar este módulo, deberá:

- Definir y calcular el **momento de inercia** para sistemas simples.
- Definir y aplicar los conceptos de **segunda ley de Newton, energía cinética rotacional, trabajo rotacional, potencia rotacional y cantidad de movimiento rotacional** a la solución de problemas físicos.
- Aplicar principios de **conservación de energía y cantidad de movimiento** a problemas que involucran rotación de cuerpos rígidos.

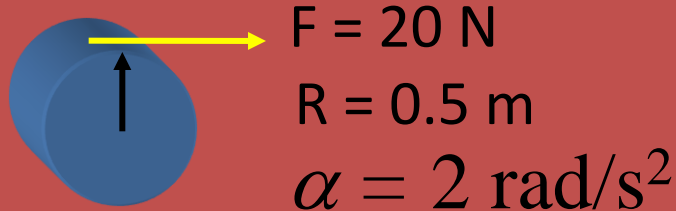
Inercia de rotación

Considere la segunda ley de Newton para que la inercia de rotación se modele a partir de la ley de traslación.



Inercia lineal, m

$$m = \frac{24 \text{ N}}{4 \text{ m/s}^2} = 5 \text{ kg}$$



Inercia rotacional, I

$$I = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{(20 \text{ N})(0.5 \text{ m})}{4 \text{ m/s}^2} = 2.5 \text{ kg m}^2$$

La **fuerza** hace para la traslación lo que el **momento de torsión** hace para la rotación:

Energía cinética rotacional

Considere masa pequeña m :

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

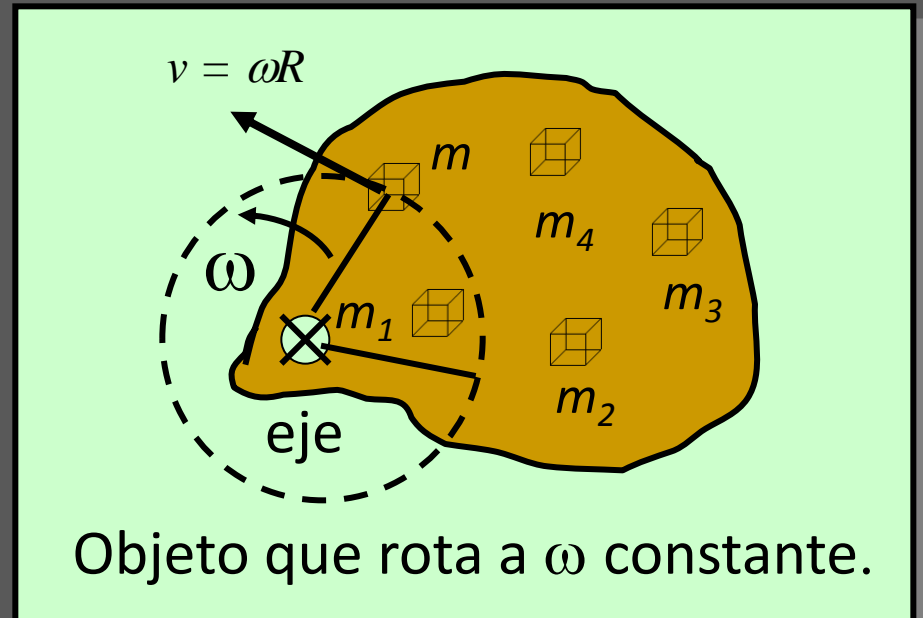
$$K = \frac{1}{2}m(\omega R)^2$$

$$K = \frac{1}{2}(mR^2)\omega^2$$

Suma para encontrar K total:

$$K = \frac{1}{2}(\sum mR^2)\omega^2$$

($\frac{1}{2}\omega^2$ igual para toda m)



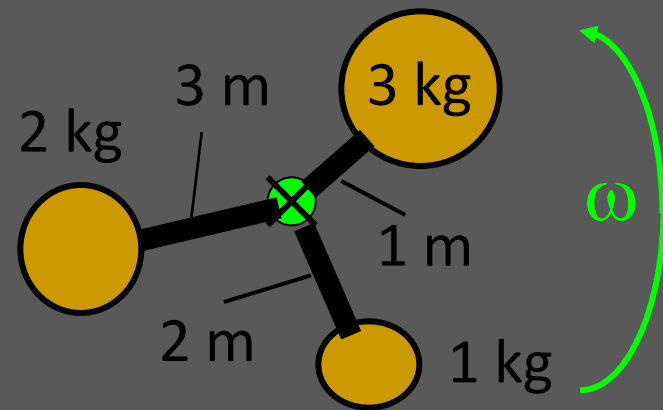
Definición de inercia rotacional:

$$I = \sum mR^2$$

Ejemplo 1: ¿Cuál es la energía cinética rotacional del dispositivo que se muestra si rota con rapidez constante de **600 rpm**?

Primero: $I = \Sigma mR^2$

$$I = (3 \text{ kg})(1 \text{ m})^2 + (2 \text{ kg})(3 \text{ m})^2 + (1 \text{ kg})(2 \text{ m})^2$$



$$I = 25 \text{ kg m}^2$$

$$\omega = 600 \text{ rpm} = 62.8 \text{ rad/s}$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(25 \text{ kg m}^2)(62.8 \text{ rad/s})^2$$

$$K = 49,300 \text{ J}$$

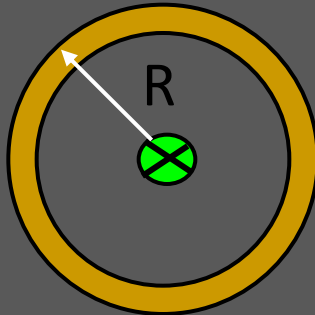
Inercias rotacionales comunes



$$I = \frac{1}{3} mL^2$$

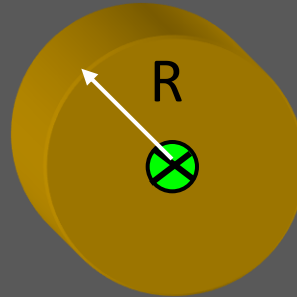


$$I = \frac{1}{12} mL^2$$



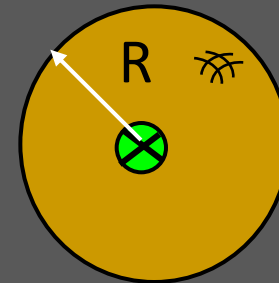
$$I = mR^2$$

Aro



$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

Disco o cilindro

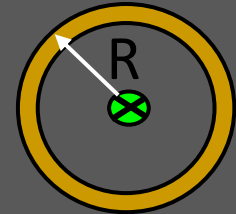


$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

Esfera sólida

Ejemplo 2: Un aro circular y un disco tienen **cada uno** una masa de **3 kg** y un radio de **30 cm**. Compare sus inercias rotacionales.

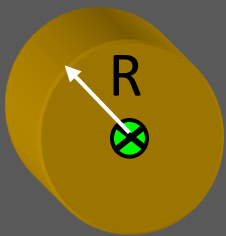
$$I = mR^2 = (3 \text{ kg})(0.2 \text{ m})^2$$



$$I = 0.120 \text{ kg m}^2$$

$$I = mR^2$$

Aro



$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

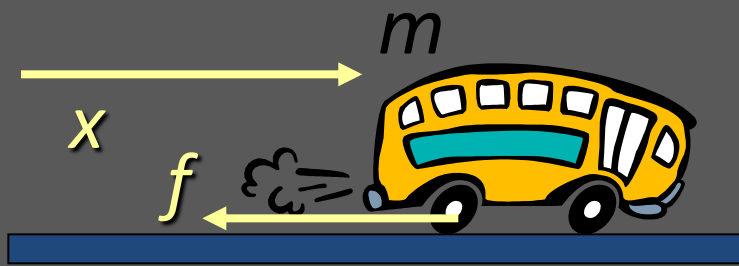
Disco

$$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(3 \text{ kg})(0.2 \text{ m})^2$$

$$I = 0.0600 \text{ kg m}^2$$

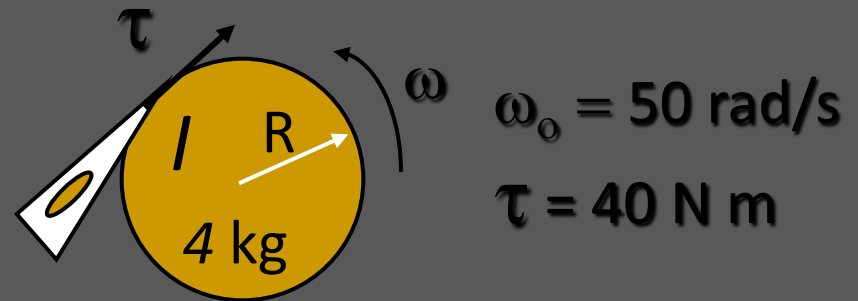
Analogías importantes

Para muchos problemas que involucran rotación, hay una analogía extraída del movimiento lineal.



Una fuerza resultante F produce aceleración negativa a para una masa m .

$$F = ma$$



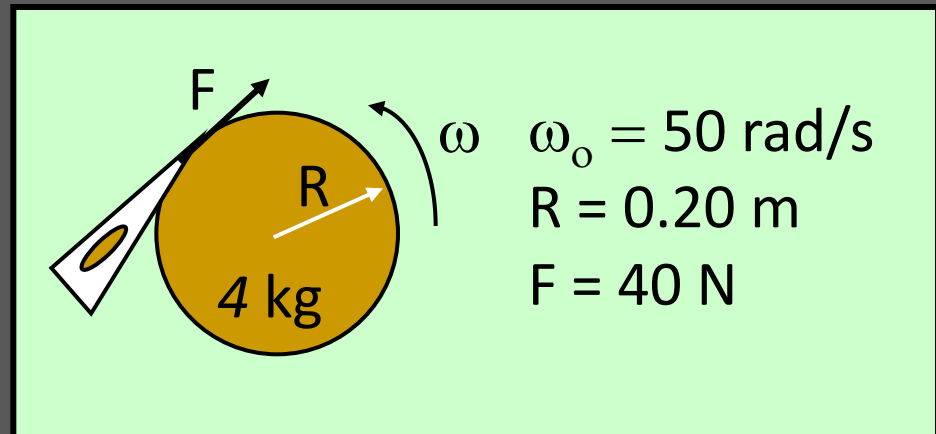
Un momento de torsión resultante τ produce aceleración angular α de disco con inercia rotacional I .

$$\tau = I\alpha$$

Segunda ley de rotación de Newton

¿Cuántas revoluciones requiere para detenerse?

$$\tau = I\alpha$$



$$FR = (\frac{1}{2}mR^2)\alpha$$

$$\alpha = \frac{2F}{mR} = \frac{2(40\text{N})}{(4 \text{ kg})(0.2 \text{ m})}$$

$$\alpha = 100 \text{ rad/s}^2$$

$$2\alpha\theta = \omega_f^2 - \omega_0^2$$

$$\theta = \frac{-\omega_0^2}{2\alpha} = \frac{-(50 \text{ rad/s})^2}{2(100 \text{ rad/s}^2)}$$

$$\theta = 12.5 \text{ rad} = 1.99 \text{ rev}$$

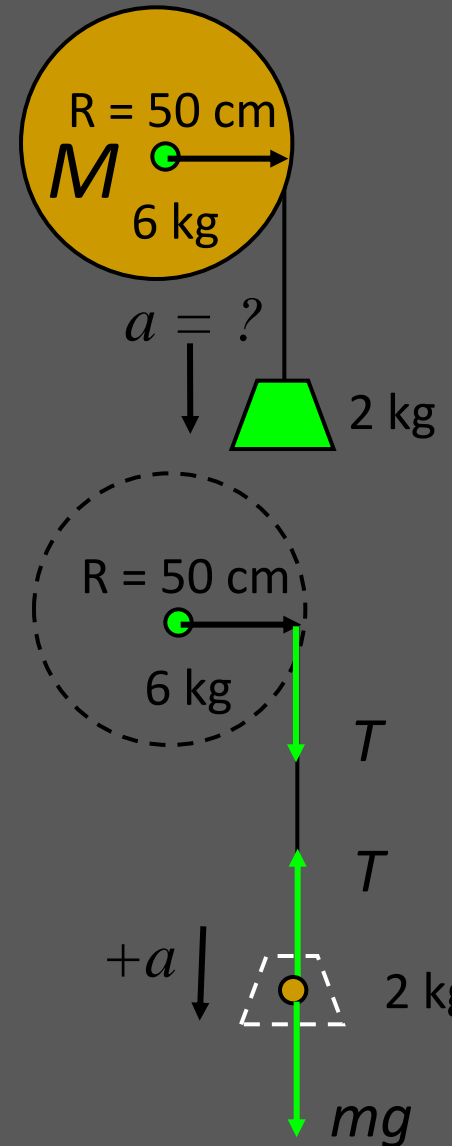
Ejemplo 3: ¿Cuál es la aceleración lineal de la masa de **2-kg** que cae?

Aplique 2a ley de Newton al disco rotatorio:

$$\tau = I\alpha \quad \longrightarrow \quad \cancel{TR} = (\cancel{\frac{1}{2}MR^2})\alpha$$

$$T = \frac{1}{2}MR\alpha \quad \text{pero} \quad a = \alpha R; \quad \alpha = \frac{a}{R}$$

$$T = \frac{1}{2}MR \left(\frac{a}{R} \right) \quad \text{y} \quad T = \frac{1}{2}Ma$$



Aplique 2a ley de Newton a la masa que cae:

$$mg - T = ma$$

$$mg - \frac{1}{2}Ma = ma$$

$$(2 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) - \frac{1}{2}(6 \text{ kg}) a = (2 \text{ kg}) a$$

$$19.6 \text{ N} - (3 \text{ kg}) a = (2 \text{ kg}) a$$

$$a = 3.92 \text{ m/s}^2$$

Trabajo y potencia para rotación

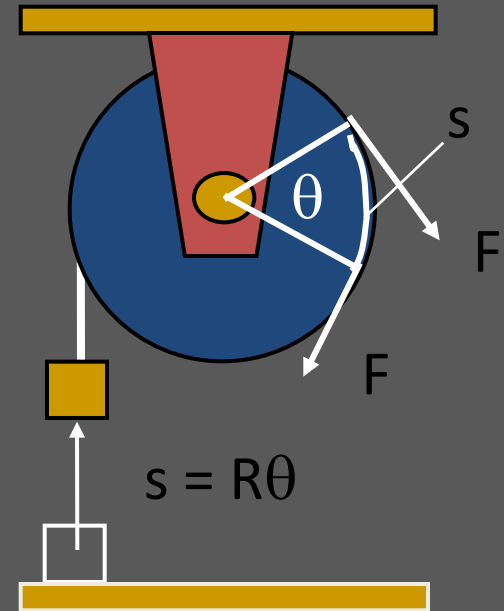
$$\text{Trabajo} = Fs = FR\theta$$

$$\tau = FR$$

$$\text{Trabajo} = \tau\theta$$

$$\text{Potencia} = \frac{\text{Trabajo}}{t} = \frac{\tau\theta}{t} \quad \bar{\omega} = \frac{\theta}{t}$$

$$\text{Potencia} = \tau \bar{\omega}$$



Potencia = Momento de torsión x velocidad angular promedio

Ejemplo 4: El disco rotatorio tiene un radio de **40 cm** y una masa de **6 kg**. Encuentre el trabajo y la potencia si la masa de **2 kg** se eleva **20 m** en **4 s**.

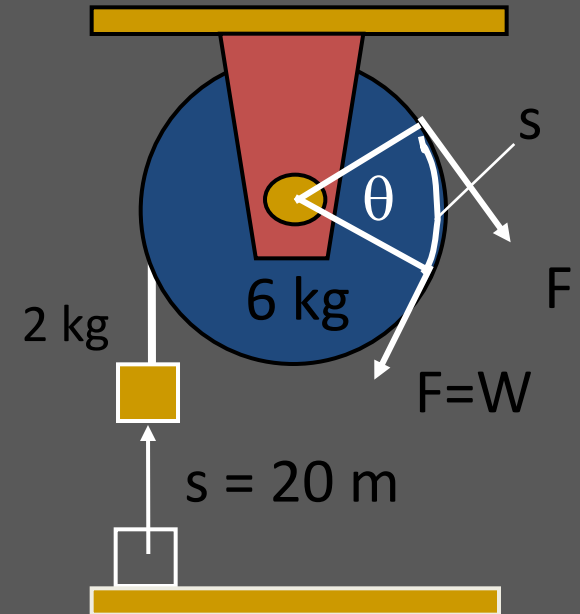
$$\text{Trabajo} = \tau\theta = FR\theta$$

$$\theta = \frac{s}{R} = \frac{20 \text{ m}}{0.4 \text{ m}} = 50 \text{ rad}$$

$$F = mg = (2 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2); F = 19.6 \text{ N}$$

$$\text{Trabajo} = (19.6 \text{ N})(0.4 \text{ m})(50 \text{ rad})$$

$$\text{Potencia} = \frac{\text{Trabajo}}{t} = \frac{392 \text{ J}}{4 \text{ s}}$$



$$\text{Trabajo} = 392 \text{ J}$$

$$\text{Potencia} = 98 \text{ W}$$

El teorema trabajo-energía

Recuerde para movimiento lineal que el trabajo realizado es igual al cambio en energía cinética lineal:

$$Fx = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

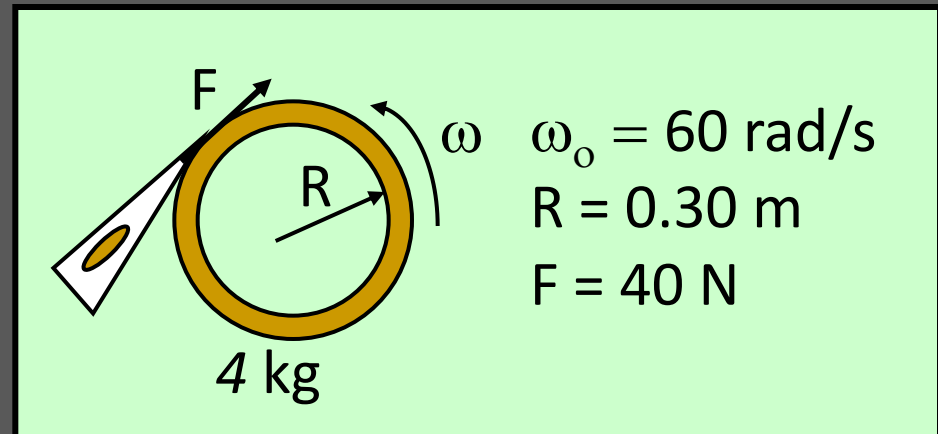
Al usar analogías angulares, se encuentra que el trabajo rotacional es igual al cambio en energía cinética rotacional:

$$\tau\theta = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

Aplicación del teorema trabajo-energía:

¿Qué trabajo se necesita para detener la rueda que rota?

$$\text{Trabajo} = \Delta K_r$$



Primero encuentre I para rueda: $I = mR^2 = (4 \text{ kg})(0.3 \text{ m})^2 = 0.36 \text{ kg m}^2$

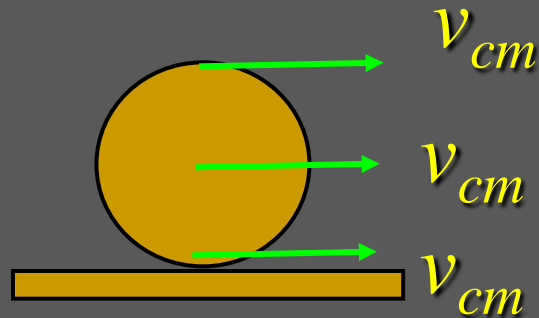
$$\tau\theta = \cancel{\frac{1}{2}I\omega_f^2} - \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

$$\text{Trabajo} = -\frac{1}{2}I\omega_0^2$$

$$\text{Trabajo} = -\frac{1}{2}(0.36 \text{ kg m}^2)(60 \text{ rad/s})^2$$

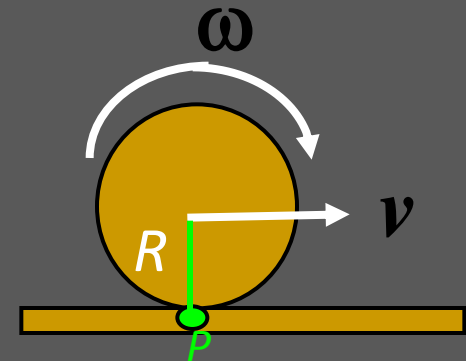
$$\text{Trabajo} = -648 \text{ J}$$

Rotación y traslación combinadas



Primero considere un disco que se desliza sin fricción. La velocidad de cualquier parte es igual a la velocidad v_{cm} del centro de masa.

Ahora considere una bola que rueda sin deslizar. La velocidad angular ω en torno al punto P es igual que ω para el disco, así que se escribe:



$$\omega = \frac{v}{R}$$

o

$$v = \omega R$$

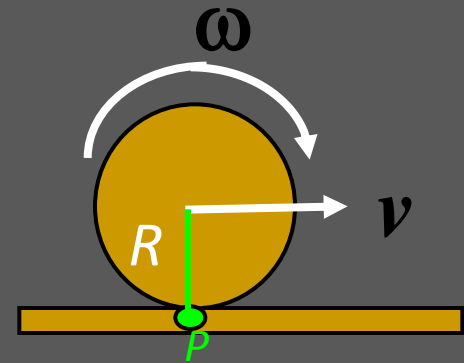
Dos tipos de energía cinética

Energía cinética de
traslación:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Energía cinética de
rotación:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$



Energía cinética total de un objeto que rueda:

$$K_T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Conversiones angular/lineal

En muchas aplicaciones, debe resolver una ecuación con parámetros angulares y lineales. Es necesario recordar los puentes:

Desplazamiento:	$s = \theta R$	$\theta = \frac{s}{R}$
Velocidad:	$v = \omega R$	$\omega = \frac{v}{R}$
Aceleración:	$a = \alpha R$	$\alpha = \frac{a}{R}$

¿Traslación o rotación?

Si debe resolver un parámetro lineal, debe convertir todos los términos angulares a términos lineales:

$$\theta = \frac{s}{R} \quad \omega = \frac{v}{R} \quad a = \frac{\alpha}{R} \quad I = (?)mR^2$$

Si debe resolver un parámetro angular, debe convertir todos los términos lineales a términos angulares:

$$s = \theta R \quad v = \omega R \quad v = \alpha R$$

Ejemplo (a): Encuentre la velocidad v de un disco dada su energía cinética total E .

$$\text{Energía total: } E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2; \quad I = \frac{1}{2}mR^2; \quad \omega = \frac{v}{R}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v^2}{R^2}\right); \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2$$

$$E = \frac{3mv^2}{4} \quad \text{or} \quad v = \sqrt{\frac{4E}{3m}}$$

Ejemplo (b) Encuentre la velocidad angular ω de un disco dada su energía cinética total E .

$$\text{Energía total: } E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2; \quad I = \frac{1}{2}mR^2; \quad v = \omega R$$

$$E = \frac{1}{2}m(\omega R)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega^2; \quad E = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{4}mR^2\omega^2$$

$$E = \frac{3mR^2\omega^2}{4} \quad \text{or} \quad \omega = \sqrt{\frac{4E}{3mR^2}}$$

Estrategia para problemas

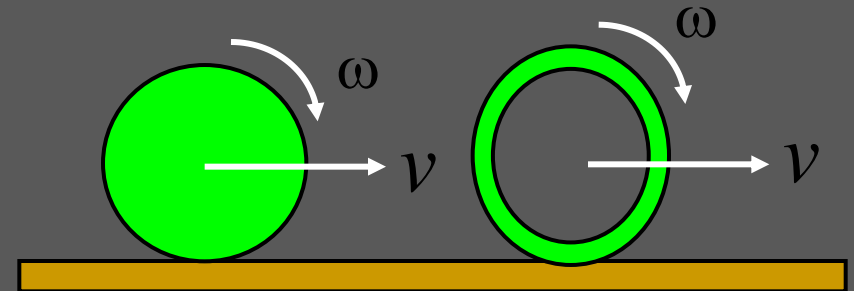
- Dibuje y etiquete un bosquejo del problema.
- Mencione lo dado y establezca lo que debe encontrar.
- Escriba fórmulas para encontrar los momentos de inercia de cada cuerpo que rota.
- Recuerde conceptos involucrados (potencia, energía, trabajo, conservación, etc.) y escriba una ecuación que involucre la cantidad desconocida.
- Resuelva para la cantidad desconocida.

Ejemplo 5: Un aro y un disco circulares, cada uno con la misma masa y radio, ruedan con rapidez lineal v . Compare sus energías cinéticas.

Dos tipos de energía:

$$K_T = \frac{1}{2}mv^2$$

$$K_r = \frac{1}{2}I\omega^2$$



Energía total: $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Disco: $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mR^2 \right) \left(\frac{v^2}{R^2} \right)$

$$E = \frac{3}{4}mv^2$$

Aro: $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \left(mR^2 \right) \left(\frac{v^2}{R^2} \right)$

$$E = mv^2$$

Conservación de energía

La energía total todavía se conserva para sistemas en rotación y traslación.

Sin embargo, ahora debe considerar la rotación.

$$\text{Inicio: } (U + K_t + K_R)_o = \text{Fin: } (U + K_t + K_R)_f$$

¿Altura?
¿Rotación?
¿Velocidad?

$$mgh_o$$
$$\frac{1}{2}I\omega_o^2$$
$$\frac{1}{2}mv_o^2$$

=

$$mgh_f$$
$$\frac{1}{2}I\omega_f^2$$
$$\frac{1}{2}mv_f^2$$

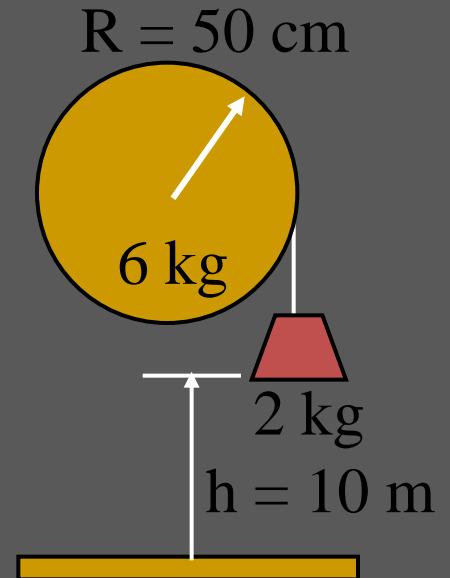
¿Altura?
¿Rotación?
¿Velocidad?

Ejemplo 6: Encuentre la velocidad de la masa de **2 kg** justo antes de golpear el suelo.

$$\begin{array}{l} mgh_o \\ \cancel{\frac{1}{2}I\omega_o^2} \\ \cancel{\frac{1}{2}mv_o^2} \end{array}$$

=

$$\begin{array}{l} \cancel{mgh_f} \\ \cancel{\frac{1}{2}I\omega_f^2} \\ \frac{1}{2}mv_f^2 \end{array}$$



$$mgh_o = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$mgh_o = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v^2}{R^2}\right)$$

$$2.5v^2 = 196 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$(2)(9.8)(10) = \frac{1}{2}(2)v^2 + \frac{1}{4}(6)v^2$$

$$v = 8.85 \text{ m/s}$$

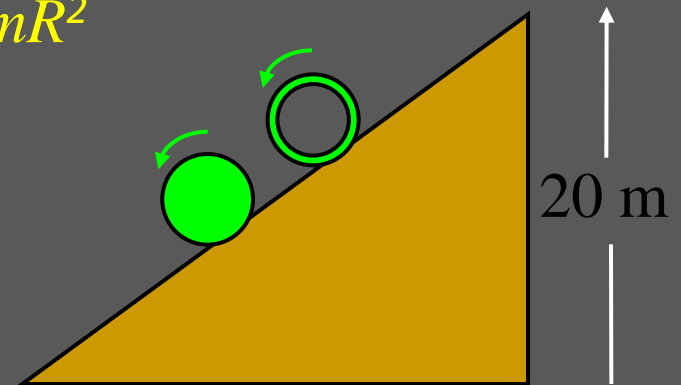
Ejemplo 7: Un aro y un disco ruedan desde lo alto de un plano inclinado. ¿Cuáles son sus rapidezces en el fondo si la altura inicial es 20 m?

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{Aro: } I = mR^2$$

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(mR^2) \left(\frac{v^2}{R^2} \right)$$

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2; \quad \cancel{mgh_0} = \cancel{mv^2}$$

$$v = \sqrt{gh_0} = \sqrt{(9.8 \text{ m/s}^2)(20 \text{ m})}$$



Aro:

$$v = 14 \text{ m/s}$$

Disco: $I = \frac{1}{2}mR^2$; $mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

$$\cancel{mgh_0} = \frac{1}{2}\cancel{mv^2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\cancel{mR^2}) \left(\frac{v^2}{\cancel{R^2}} \right)$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh_0}$$

$$v = 16.2 \text{ m/s}$$

Definición de cantidad de movimiento angular

Considere una partícula m que se mueve con velocidad v en un círculo de radio r .

Defina cantidad de movimiento angular L :

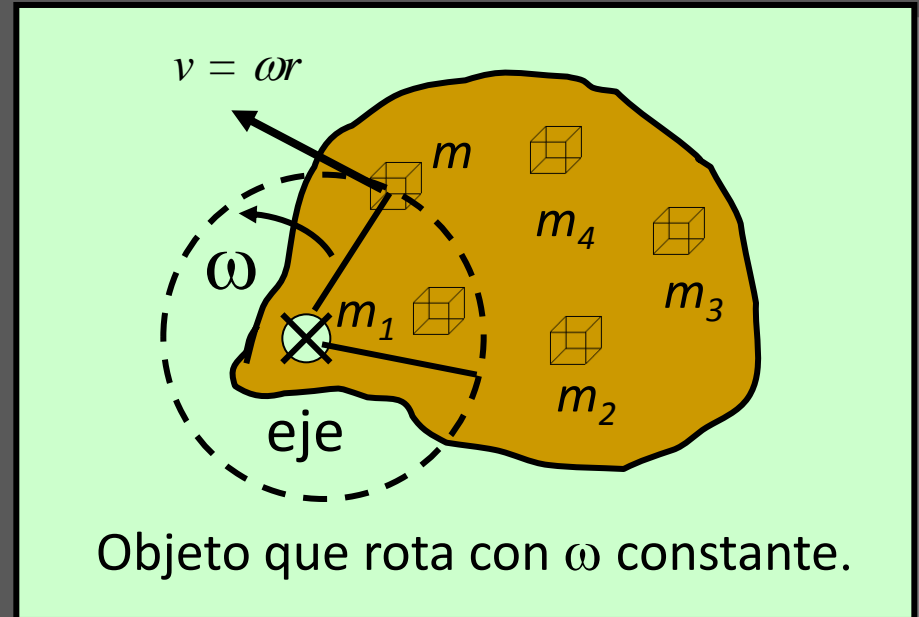
$$L = mvr$$

Al sustituir $v = \omega r$, da:

$$L = m(\omega r) r = mr^2 \omega$$

Para cuerpo extendido en rotación:

$$L = (\sum mr^2) \omega$$

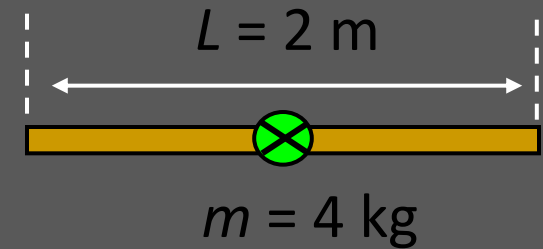


Dado que $I = \sum mr^2$, se tiene:

$$L = I\omega$$

Cantidad de movimiento angular

Ejemplo 8: Encuentre la cantidad de movimiento angular de una barra delgada de **4 kg** y **2 m** de longitud si rota en torno a su punto medio con una rapidez de **300 rpm**.



$$\text{Para barra : } I = \frac{1}{12} mL^2 = \frac{1}{12} (4 \text{ kg})(2 \text{ m})^2$$

$$I = 1.33 \text{ kg m}^2$$

$$\omega = \left(300 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \right) \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 31.4 \text{ rad/s}$$

$$L = I\omega = (1.33 \text{ kg m}^2)(31.4 \text{ rad/s})^2$$

$$L = 1315 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Impulso y cantidad de movimiento

Recuerde que, para movimiento lineal, el impulso lineal es igual al cambio en cantidad de movimiento lineal:

$$F \Delta t = mv_f - mv_0$$

Al usar analogías angulares, se encuentra que el impulso angular es igual al cambio en cantidad de movimiento angular :

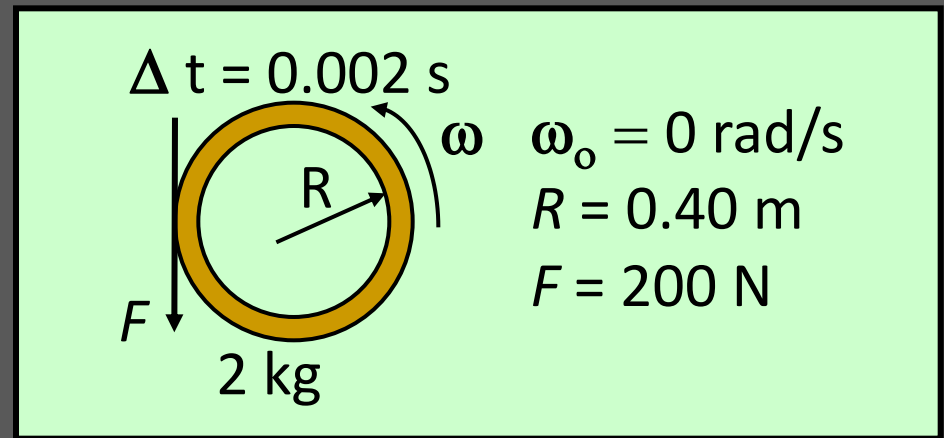
$$\tau \Delta t = I\omega_f - I\omega_0$$

Ejemplo 9: Una fuerza de **200 N** se aplica al borde de una rueda libre para girar. La fuerza actúa durante **0.002 s**. ¿Cuál es la velocidad angular final?

$$I = mR^2 = (2 \text{ kg})(0.4 \text{ m})^2$$

$$I = 0.32 \text{ kg m}^2$$

Momento de torsión
aplicado $\tau = FR$



Impulso = cambio en cantidad de movimiento angular

$$\tau \Delta t = I\omega_f - \cancel{I\omega_0} \quad \longrightarrow \quad FR \Delta t = I\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{FR\Delta t}{I} = \frac{(200 \text{ N})(0.4 \text{ m})(0.002 \text{ s})}{0.32 \text{ m}^2}$$

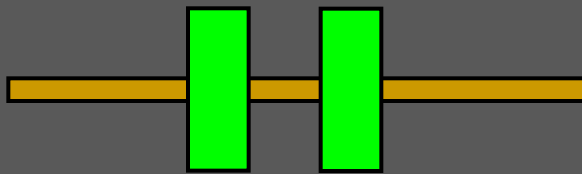
$$\omega_f = 0.5 \text{ rad/s}$$

Conservación de cantidad de movimiento

En ausencia de momento de torsión externo, se conserva la cantidad de movimiento rotacional de un sistema (es constante).

$$I_f \omega_f - I_o \omega_o = \tau \Delta t$$

$$I_f \omega_f = I_o \omega_o$$



$$I_o = 2 \text{ kg m}^2; \omega_o = 600 \text{ rpm}$$



$$I_f = 6 \text{ kg m}^2; \omega_o = ?$$

$$\omega_f = \frac{I_o \omega_o}{I_f} = \frac{(2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(600 \text{ rpm})}{6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

$$\omega_f = 200 \text{ rpm}$$

Resumen – Analogías rotacionales

Cantidad	Lineal	Rotacional
Desplazamiento	Desplazamiento x	Radianes θ
Inercia	Masa (kg)	I (kg·m ²)
Fuerza	Newtons N	Momento de torsión N·m
Velocidad	\vec{v} "m/s "	$\vec{\omega}$ Rad/s
Aceleración	\vec{a} "m/s ² "	$\vec{\alpha}$ Rad/s ²
Cantidad de movimiento	mv (kg m/s)	$I\omega$ (kg·m ² ·rad/s)

Fórmulas análogas

Movimiento lineal	Movimiento rotacional
$F = ma$	$\tau = I\alpha$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
$\text{Trabajo} = Fx$	$\text{Trabajo} = \tau\theta$
$\text{Potencia} = Fv$	$\text{Potencia} = I\omega$
$Fx = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_o^2$	$\tau\theta = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_o^2$

Resumen de fórmulas:

$$I = \Sigma mR^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\text{Trabajo} = \tau \theta$$

$$I_o \omega_o = I_f \omega_f$$

$$\tau \theta = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_o^2$$

$$\text{Potencia} = \frac{\tau \theta}{t} = \tau \omega$$

¿Altura?
¿Rotación?
¿Velocidad?

$$mgh_o$$
$$\frac{1}{2} I \omega_o^2$$
$$\frac{1}{2} m v_o^2$$

=

$$mgh_f$$
$$\frac{1}{2} I \omega_f^2$$
$$\frac{1}{2} m v_f^2$$

¿Altura?
¿Rotación?
¿Velocidad?

CONCLUSIÓN: Capítulo 11B

Rotación de cuerpo rígido

